MIT / 18.06

线性代数计算笔记

从方程组到最小二乘

Lecture 1–16 选编

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

计算方法 / 独立例题 / 精确验算

Version 1.0

2026.11.03

目录

Lecture 1：线性方程组的几何解释 **1**
1.1 从方程组写出矩阵式 1
1.2 把矩阵乘向量写成列组合 1
1.3 区分唯一解、无解和无穷多解 2

Lecture 2：矩阵消元 **3**
2.1 高斯消元与回代 3
2.2 用消元矩阵表示行变换 4
2.3 主元为零时换行 4
2.4 从矛盾行判定无解 5

Lecture 3：矩阵乘法与逆矩阵 **6**
3.1 行乘列：逐元素计算 6
3.2 按列计算矩阵乘积 6
3.3 按行计算矩阵乘积 7
3.4 列乘行：外积之和 7
3.5 Gauss–Jordan 消元求逆 8
3.6 用消元判断不可逆 8
3.7 计算矩阵乘积的逆 9

Lecture 4：分解为 A = LU **10**
4.1 从消元倍数构造 LU 分解 10
4.2 前代、回代与多右端项复用 11
4.3 需要换行时计算 PA = LU 12

Lecture 5：转置、置换与实向量空间 **13**
5.1 转置与乘积转置 13
5.2 置换矩阵的左乘与右乘 13
5.3 计算 A 的转置乘 A 并检查对称性 14
5.4 检验子空间并写成参数形式 14

Lecture 6：列空间与零空间 **15**
6.1 判断向量是否属于列空间 15
6.2 利用主元列计算列空间的基 15
6.3 由阶梯方程直接读出零空间 16

Lecture 7：求解 Ax = 0：主元变量与特殊解 **17**
7.1 行最简形与特殊解 17
7.2 从标准分块形式直接构造零空间矩阵 17
7.3 主元列不连续时还原变量顺序 18

Lecture 8：求解 Ax = b：行最简形 **19**
8.1 对含参数右端项求相容条件 19
8.2 特解加齐次解：写出全部非齐次解 20
8.3 用秩分类解的数量 21

Lecture 9：线性无关、基与维数 **22**
9.1 用齐次方程判断线性无关 22

9.2 从生成向量中筛选一组基 22
9.3 从线性约束计算子空间的基和维数 23
9.4 把独立向量补成整个空间的一组基 23
9.5 求向量在给定基下的表示系数 24

Lecture 10：四个基本子空间 **25**
10.1 计算列空间 C(A) 25
10.2 计算行空间 C(A 的转置) 25
10.3 计算零空间 N(A) 26
10.4 转置后求左零空间 N(A 的转置) 26
10.5 累计行变换直接提取左零空间 27

Lecture 11：把矩阵视为向量：矩阵子空间 **28**
11.1 参数化矩阵子空间并提取基 28

Lecture 14：正交向量与正交子空间 **29**
14.1 用内积判断向量是否正交 29
14.2 用生成矩阵判断两个子空间正交 29
14.3 把求正交补转化为求零空间 30
14.4 验证四个子空间的正交关系并判断可解性 31

Lecture 15：投影到子空间 **32**
15.1 投影到一条直线 32
15.2 投影到具有正交基的子空间 32
15.3 通过正规方程投影到一般列空间 33

Lecture 16：投影矩阵与最小二乘 **34**
16.1 计算向一条直线投影的矩阵 34
16.2 计算向列空间投影的矩阵 35
16.3 计算向正交补的投影 35
16.4 求不相容方程组的最小二乘解 36
16.5 用最小二乘拟合直线 37
16.6 从正交条件判断候选最小二乘解 38

Lecture 1：线性方程组的几何解释

本讲把同一个方程组分别看成平面的交点与列向量的线性组合。先学会转换表示，再判断解的情况。

1.1 从方程组写出矩阵式

适用　已知线性方程组，需要整理系数、未知量和常数项。

步骤　固定未知量顺序；逐行抄出系数，缺项补零；把常数写成同一顺序的列向量。

例题　把下面方程组写成矩阵式：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

按未知量 x_1, x_2, x_3 的顺序排列：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad Ax = b.$$

每行对应三维空间中的一个平面。三个平面的公共点为

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

验算　$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = b$，三个方程均成立。

易错　换未知量顺序时必须同时交换矩阵的列；常数项不能混入系数矩阵。

1.2 把矩阵乘向量写成列组合

适用　想理解 $Ax = b$ 是否能由 A 的列向量拼出 b。

步骤　记 $A = [a_1\ a_2\ a_3]$；用 x_i 乘第 i 列，再逐项相加。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

求 Ax。按列展开：

$$Ax = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

因此 b 是三列的线性组合，组合系数依次是 $2, -1, 3$。

验算　按行计算得到 $Ax = (2-2,\ -1+3,\ 4+3)^T = (0, 2, 7)^T$。

易错　系数乘的是整列；不能把 x_i 与第 i 行对应。

1.3 区分唯一解、无解和无穷多解

适用　观察独立约束是否足够，以及方程之间是否相容。此处先看简单结构，系统消元放在下一讲。
步骤　先找能直接求出的未知量；若某行是其他行的和，就比较右端项是否也满足同样关系。
例题　情形一：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}5\\0\\6\end{bmatrix}.$$

第三行给 $x_3=2$，第二行给 $x_2=2$，第一行给 $x_1=1$，故唯一解为 $x=(1,2,2)^T$。
情形二、三使用同一组系数，比较两个右端项：

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix},\quad d=\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}.$$

第三行是前两行之和。对 $Bx=c$，第三个常数也是前两个之和，令 $x_3=t$ 得

$$x=\begin{bmatrix}-1\\3\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

对 $Bx=d$，却要求 $2+3=6$，所以无解。
验算　唯一解代回 $Ax=b$；无穷多解检查 $Bx_p=c$、$Bs=0$；无解检查常数项矛盾。
易错　方程多并不保证唯一解；关键在于独立约束和相容性。

Lecture 2：矩阵消元

消元的目标是逐步减少未知量之间的耦合。每次行变换都必须同时作用于右端项。

2.1 高斯消元与回代

适用 方程组需要先化为上三角形，再自下而上求解。

步骤 选择非零主元；用“目标行减倍数乘主元行”消元；得到上三角方程组后回代。

例题

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\4&3&1\\-2&1&2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}-3\\1\\2\end{bmatrix}.$$

先做 $R_2\leftarrow R_2-2R_1$、$R_3\leftarrow R_3+R_1$，再做 $R_3\leftarrow R_3-2R_2$：

$$[A\mid b]\longrightarrow\begin{bmatrix}2&1&-1&-3\\0&1&3&7\\0&2&1&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2&1&-1&-3\\0&1&3&7\\0&0&-5&-15\end{bmatrix}.$$

回代：$-5x_3=-15$，$x_2+3x_3=7$，$2x_1+x_2-x_3=-3$，得到

$$x=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}.$$

验算 $Ax=\begin{bmatrix}-3\\1\\2\end{bmatrix}=b$。

易错 后一步使用的是已经更新的行；不要继续使用消元前的旧数据。

2.2 用消元矩阵表示行变换

适用　需要把一次行操作写成矩阵乘法，或恢复被消去的行。

步骤　在单位矩阵上实施同样的行变换得到 E；左乘 A；恢复时用 E^{-1}。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

要做 $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$，在 I 上做同样操作：

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad EA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

逆操作为 $R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1$，因此

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

验算　$E^{-1}(EA) = A$，且只有第二行发生变化。

易错　行变换对应左乘；连续先做 E_1 再做 E_2，总矩阵是 E_2E_1。

2.3 主元为零时换行

适用　当前位置主元为零，但同列下方仍有非零元素。

步骤　先交换行，把非零元素移到主元位置；同步交换右端项；继续消元。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

交换 R_1, R_2：

$$[PA \mid Pb] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

再做 $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$、$R_3 \leftarrow R_3 - \frac{3}{2}R_2$：

$$[U \mid c] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}.$$

回代得到 $x_3 = -1$、$x_2 = 1$、$x_1 = 2$。

验算　$A(2, 1, -1)^T = b$。

易错　某个主元为零不等于矩阵不可逆；应先检查能否换行。

2.4 从矛盾行判定无解

适用　消元时系数行变成零，但对应常数不为零。

步骤　先消去线性相关的行；观察是否出现 $[0\ \cdots\ 0 \mid c]$ 且 $c \neq 0$。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

做 $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

第二行要求 $0 = 1$，因此无解，后续未知量无需继续求。

验算　原方程左端第二行是第一行的两倍，但 $7 \neq 2 \times 3$。

易错　零系数行且右端也为零，只表示冗余约束，不是矛盾。

Lecture 3：矩阵乘法与逆矩阵

先掌握矩阵乘法的四种组织方式，再用行变换求逆。四种乘法使用四组独立数据。

3.1 行乘列：逐元素计算

适用　需要积矩阵的少数元素，或矩阵没有明显结构。

步骤　若 A 为 $m\times n$、B 为 $n\times p$，则 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$；每个元素用一行点乘一列。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&2\\2&-1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&-2&3\\0&1&2\end{bmatrix}.$$

例如第一行第三列为 $1\times1+2\times3+(-1)\times2=5$。逐项计算得

$$AB=\begin{bmatrix}4&-5&5\\3&-4&13\\3&3&1\end{bmatrix}.$$

验算　另查 $c_{32}=2\times0+(-1)(-2)+1\times1=3$，与结果一致。

易错　相乘条件是内侧维数相同；结果的行数来自 A，列数来自 B。

3.2 按列计算矩阵乘积

适用　右矩阵各列较稀疏，适合把积矩阵逐列求出。

步骤　写 $B=[b_1\ b_2\ b_3]$，则 $AB=[Ab_1\ Ab_2\ Ab_3]$；每列再看成 A 的列组合。

例题

$$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&1&-1\\0&2&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\1&2&0\end{bmatrix}.$$

$$Ab_1=a_1+a_3=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix},$$

$$Ab_2=a_2+2a_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\8\end{bmatrix},$$

$$Ab_3=2a_1-a_2=\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

把三列按原顺序拼回：

$$AB=\begin{bmatrix}3&2&4\\0&-1&1\\3&8&-2\end{bmatrix}.$$

验算　检查第一列第一项 $2\times1+0\times0+1\times1=3$。

易错　这是按 B 的列分解；列组合的素材取自 A。

3.3 按行计算矩阵乘积

适用　左矩阵各行较稀疏，适合把积矩阵逐行求出。

步骤　记 B 的行为 r_1, r_2, r_3；AB 的第 i 行为 $a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + a_{i3}r_3$。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(AB)_{1,:} = r_1 + 2r_3 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$
$$(AB)_{2,:} = -r_2 + r_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$
$$(AB)_{3,:} = 2r_1 + r_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

验算　第一行第二项也可由 $1 \times 3 + 0 \times (-1) + 2 \times 2 = 7$ 得到。

易错　行组合的系数来自 A 的行，被组合的是 B 的行。

3.4 列乘行：外积之和

适用　需要把乘积拆成秩至多为一的简单矩阵，或利用非零列、行对。

步骤　写 $A = [a_1\ a_2\ a_3]$，记 B 的行为 r_k；计算 $AB = \sum_{k=1}^{3} a_k r_k$。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

每项取左矩阵的一列乘右矩阵的对应行：

$$a_1 r_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$a_2 r_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix},$$
$$a_3 r_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$AB = a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

验算　按行乘列检查 $(AB)_{23} = 2 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 3 = 2$。

易错　外积的结果是矩阵；不要误算成行乘列得到的标量。

3.5 Gauss–Jordan 消元求逆

适用　A 是方阵，并且能够消元得到单位矩阵。

步骤　把单位矩阵接在右侧；所有行操作同步作用于整个增广矩阵；左侧变为 I 后，右侧就是逆矩阵。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

先做 $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$、$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$：

$$[A \mid I] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

再做 $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$、$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$：

$$[I \mid A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

验算　$AA^{-1} = A^{-1}A = I$。

易错　右侧必须跟着做全部行操作；不能只把 A 化简后再拼一个单位矩阵。

3.6 用消元判断不可逆

适用　方阵是否有逆尚不确定。

步骤　先消元；若缺少某列主元，或出现零行，秩就小于阶数，矩阵不可逆。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

做 $R_3 \leftarrow R_3 - R_1 - R_2$，得到零行；继续化简：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

只有两个主元，$\mathrm{rank}(A) = 2 < 3$，所以 A^{-1} 不存在。

验算　$A(-1,-1,1)^T = 0$，存在非零零空间向量。

易错　只有方阵才讨论通常意义的双侧逆；满秩的非方阵也不应直接记作 A^{-1}。

3.7 计算矩阵乘积的逆

适用　乘积中的每个方阵均可逆。

步骤　把乘积的因子顺序反过来，再分别求逆：$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

验算　直接相乘有 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$；本题 $A^{-1}B^{-1}$ 的 $(2,3)$ 项为 0，而正确结果该项为 2。

易错　一般不能交换矩阵乘法顺序；逆矩阵的顺序必须倒置。

Lecture 4：分解为 A = LU

把消元过程保存下来，就可以重复求解同一系数矩阵对应的不同方程组。这里的 L 对角线统一为 1。

4.1 从消元倍数构造 LU 分解

适用　方阵消元时无需换行，并且各步主元非零。

步骤　把消元后的上三角矩阵记作 U；把第 i 行消去第 j 列时的倍数 l_{ij} 填入 L 的对应位置。

例题

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\4&5&1\\-2&8&5\end{bmatrix}.$$

操作为 $R_2 \leftarrow R_2-2R_1$、$R_3 \leftarrow R_3+R_1$、$R_3 \leftarrow R_3-3R_2$。倍数分别为 $2,-1,3$，所以

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&3&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&3&1\\0&0&2\end{bmatrix},\quad A=LU.$$

验算　相乘 $LU=\begin{bmatrix}2&1&0\\4&5&1\\-2&8&5\end{bmatrix}=A$。

易错　L 中填消元倍数本身；消元矩阵中对应位置才是倍数的相反数。

4.2 前代、回代与多右端项复用

适用 已经知道 $A = LU$，需要求一个或多个右端项对应的解。

步骤 先从上向下解 $Ly = b$；再从下向上解 $Ux = y$。换右端项时复用同一组 L, U。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

第一组右端项为 $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$。前代依次得

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

回代：$3x_3 = 6$，$2x_2 - x_3 = -4$，$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$，得到 $x^{(1)} = (1, -1, 2)^T$。

第二组右端项为 $b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$，直接复用分解：

$$Ly_2 = b_2 \Rightarrow y_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad Ux^{(2)} = y_2 \Rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

验算 $Ax^{(1)} = b_1$、$Ax^{(2)} = b_2$；两个方程组不需要重复分解。

易错 $Ly = b$ 用前代，$Ux = y$ 用回代；不要把两个右端项混用。

4.3 需要换行时计算 PA = LU

适用 消元前需要交换行。这里示范首步换行的情形。

步骤 把换行记作 P；对 PA 进行普通消元得到 L, U；解方程时同步改用 Pb。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

交换前两行，再用倍数 $2, -1$ 消去第三行的前两项：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$PA = LU, \qquad Pb = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

前代 $Ly = Pb$ 得 $y = (3, 3, -3)^T$，回代得 $x = (1, 2, -1)^T$。

验算 $PA = LU$ 且 $Ax = b$。

易错 若消元进行到中途才换行，L 中此前已记录的相应行部分也要同步交换。

Lecture 5：转置、置换与实向量空间

本讲区分矩阵的行、列操作，并开始检查向量集合是否构成子空间。

5.1 转置与乘积转置

适用　需要交换行列，或把矩阵乘积整体转置。

步骤　把 (i,j) 元移到 (j,i)；乘积转置时反转顺序：$(AB)^T = B^T A^T$。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

验算　先求 AB 再交换行列，得到相同结果。

易错　一般 $(AB)^T \neq A^T B^T$；转置不是求逆。

5.2 置换矩阵的左乘与右乘

适用　需要用矩阵表示交换行或交换列。

步骤　对 I 交换两行得到 P；PA 交换 A 的对应行，AP 交换对应列。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$PA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

本题左乘交换第 1、2 行，右乘交换第 1、2 列。

验算　$P^T P = I$，交换两次恢复原矩阵：$P(PA) = A$、$(AP)P = A$。

易错　一般置换要用 $P^{-1} = P^T$ 恢复；本题单次对换才满足 $P^{-1} = P$。

5.3 计算 A 的转置乘 A 并检查对称性

适用　要计算列向量之间的内积，或构造一个对称矩阵。

步骤　A^TA 的 (i,j) 元是第 i,j 列的内积；先算对角和上三角，再利用对称性补齐。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}.$$

例如 $g_{11}=1^2+2^2+0^2=5$，$g_{12}=1\times1+2\times0+0\times1=1$，$g_{23}=0+0+2=2$。

$$A^TA=\begin{bmatrix}5&1&2\\1&2&2\\2&2&5\end{bmatrix}.$$

验算　结果与其转置相同；对角线是各列长度的平方，均非负。

易错　A^TA 与 AA^T 通常不同；对非方阵，两者的阶数也可能不同。

5.4 检验子空间并写成参数形式

适用　集合由向量约束给出，需要判断是否为子空间。

步骤　检查零向量、加法与数乘封闭性；齐次线性约束可以直接用其线性性质验证；再把受约束变量表示成自由参数。

例题　考虑 $S=\{x\in\mathbb{R}^3:Ax=0\}$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}.$$

三个约束等价于 $x_1+x_2+x_3=0$。零向量满足约束；若 $Au=Av=0$，则 $A(\alpha u+\beta v)=0$，故 S 是子空间。令 $x_2=s,x_3=t$：

$$x=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

对比 $T=\{x:Ax=(1,2,3)^T\}$：零向量不满足，所以 T 不是子空间。

验算　参数式中任意向量都满足三行约束；$s=t=0$ 时得到零向量。

易错　只检查加法不够；只要零向量不在集合内，就可直接否定。

Lecture 6：列空间与零空间

列空间回答“哪些右端项能够求解”，零空间回答“哪些输入会得到零”。本讲先用直接关系计算，第 7 讲再系统构造特殊解。

6.1 判断向量是否属于列空间

适用　给定 b，判断它是否可写成 A 的列向量的线性组合。

步骤　解 $Ax=b$；存在解就属于 $C(A)$。有明显的行关系时，可以先写出右端项必须满足的条件。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}.$$

第三行是前两行之和，故可解条件为 $b_3=b_1+b_2$。本题 $5=2+3$，并且

$$A\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}.$$

所以 $b\in C(A)$。相反，$c=(2,3,6)^T$ 不满足该关系，故 $c\notin C(A)$。

验算　直接求出组合 $b=2a_1+3a_2$，不只停留在条件判断。

易错　属于列空间只要求存在一个解，不要求解唯一。

6.2 利用主元列计算列空间的基

适用　需要从原矩阵的列中选出独立生成向量。

步骤　对 A 行化简；记录主元所在列号；回到原矩阵取对应列。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&0&1&1\\2&4&1&7\end{bmatrix}\longrightarrow R=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

主元在第 1、3 列，因此

$$\mathcal{B}_{C(A)}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\qquad \dim C(A)=2.$$

原矩阵另外两列满足 $a_2=2a_1$、$a_4=3a_1+a_3$，所以两列已能生成全部列。

验算　所选两列线性无关，且每个未选列均可由它们组合得到。

易错　行变换一般改变列空间；R 的主元列只提供列号，不能直接替代 A 的列。

6.3 由阶梯方程直接读出零空间

适用　矩阵已是简单阶梯形，未知量之间的关系容易回代。

步骤　令无主元列对应变量为参数；由下往上表示主元变量；把参数提取到向量前。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix},\quad Ax=0.$$

第二行给 $x_2=-3x_3$，第一行给 $x_1=-2x_2+x_3=7x_3$。令 $x_3=t$：

$$x=t\begin{bmatrix}7\\-3\\1\end{bmatrix},\quad N(A)=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}7\\-3\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

零空间位于 $\mathbb{R}^3$，维数为 1。

验算　$A(7,-3,1)^T=0$。

易错　零空间一定包含零向量；参数取零不能被排除。

Lecture 7：求解 Ax = 0：主元变量与特殊解

每个自由变量对应一个特殊解。把特殊解放成列，就得到零空间的一组基。

7.1 行最简形与特殊解

适用　一般齐次方程组，需要系统求出全部解。

步骤　化为 R；找自由变量；每次只令一个自由变量为 1，其余为 0，再求主元变量。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&4&3&1\\1&2&2&1\end{bmatrix}\longrightarrow R=\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

可先做 $R_2\leftarrow R_2-2R_1$、$R_3\leftarrow R_3-R_1$，再消去重复行和主元上方元素。主元变量为 x_1,x_3，自由变量为 x_2,x_4。

令 $(x_2,x_4)=(1,0)$ 和 $(0,1)$，分别得到

$$s_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad s_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

$$x=c_1s_1+c_2s_2,\qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

验算　$As_1=As_2=0$，两特殊解的自由分量构成 2×2 单位阵，所以线性无关。

易错　特殊解是齐次解的基向量，不是非齐次方程的特解。

7.2 从标准分块形式直接构造零空间矩阵

适用　主元列已排在前面，行最简形的非零部分为 $[I\ F]$。

步骤　由 $x_p+Fx_f=0$ 得 $x_p=-Fx_f$；因此全部解为 $x=Nx_f$，其中 $N=\binom{-F}{I}$。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&3\\1&1&1&2\end{bmatrix}\longrightarrow R=\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

前两列为主元列，后两列为自由列。取 F 为前两行后两列：

$$F=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&3\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}-2&1\\1&-3\\1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

$$x=N\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix},\qquad s,t\in\mathbb{R}.$$

矩阵 N 的两列就是零空间基。这里出现的 2×2 块只是原矩阵计算中的分块。

验算　$AN=0$；N 的最后两行是单位阵，保证两个基向量独立。

易错　只有在主元变量和自由变量按对应顺序排列后，才能直接套用这个分块表达式。

7.3 主元列不连续时还原变量顺序

适用　自由列与主元列交错，或第一列本身就是自由列。

步骤　按原列号标记变量；直接逐个设置自由变量；最终向量仍按 $x_1, x_2, \ldots$ 排列。若先交换列，最后必须逆置换。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

主元列为第 2、3 列，自由变量是 x_1, x_4；方程为 $x_2 + x_4 = 0$、$x_3 + x_4 = 0$。因此

$$x = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

验算　将两个向量分别代入 A，结果均为零。第一列全零，所以 $(1,0,0,0)^T$ 必在零空间中。

易错　不能见到两个主元就默认 x_1, x_2 为主元变量；应看实际列号。

Lecture 8：求解 Ax = b：行最简形

非齐次方程先判断是否相容，再求一个特解，最后加上全部齐次解。

8.1 对含参数右端项求相容条件

适用　系数矩阵固定，右端项含一个或多个参数。

步骤　对系数部分消元；同样操作作用于右端；每个零系数行对应一个必须为零的线性表达式。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&2\\1&2&2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}.$$

做 $R_3 \leftarrow R_3 - R_1 - R_2$：

$$\begin{bmatrix}1&1&0&b_1\\0&1&2&b_2\\0&0&0&-b_1-b_2+b_3\end{bmatrix}.$$

所以相容条件为

$$b_3 = b_1 + b_2.$$

相容时令 $x_3 = t$，由第二行得 $x_2 = b_2 - 2t$，再由第一行得 $x_1 = b_1 - b_2 + 2t$。

验算　代入第三行得到 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = b_1 + b_2$，与相容条件一致。

易错　相容条件来自零系数行的右端，不是要求右端项的每个分量都为零。

8.2 特解加齐次解：写出全部非齐次解

适用　方程组相容，并存在自由变量。

步骤　对 $[A \mid b]$ 化简；先令自由变量为零求 x_p；再求 $Ax_n = 0$ 的特殊解；相加。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

做 $R_3 \leftarrow R_3 - R_1 - R_2$、$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$，得到

$$[R \mid d] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

自由变量为 x_3, x_4。令二者为零得 $x_p = (2, -1, 0, 0)^T$；再分别令自由变量为 $(1, 0)$、$(0, 1)$，得到

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

验算　$Ax_p = b$、$As_1 = As_2 = 0$，所以任意参数都给出同一右端项。

易错　特解只需要找一个；齐次部分必须包含全部自由方向。

8.3 用秩分类解的数量

适用　已经得到阶梯形，需要快速确定解的类型。

步骤　先比较 $r = \operatorname{rank}(A)$ 和 $\operatorname{rank}([A \mid b])$；不等则无解，相等则有解。相容时，$r = n$ 为唯一解，$r < n$ 为无穷多解。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

对 A 做 $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 - R_2$ 得零行。$b_3 = 2b_1 + b_2$，故两个秩均为 2，有一个自由变量；对 c，相同行操作的右端为 1，故增广矩阵秩为 3，无解。

再看唯一解的例子：

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

做 $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$、$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$，第三个主元为 3，所以两个秩均为 3，唯一解为

$$x = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

验算　对相容系统，自由变量数一律为 $n - r$；唯一解代回 $Bx = d$。

易错　未知量数量 n 是列数；不要拿方程数量 m 与秩比较来判断唯一性。

Lecture 9：线性无关、基与维数

把向量并成矩阵后，主元列决定哪些向量独立；参数表示决定子空间需要多少个独立方向。

9.1 用齐次方程判断线性无关

适用　给定向量组，需要判断能否非平凡地组合成零。

步骤　将向量作为列组成 A；求 $Ac=0$。只有零解则独立，有非零解则相关，并可读出关系式。

例题

$$A=[v_1\ v_2\ v_3]=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow R=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

令 $c_3=t$，得到 $c_1=c_2=-t$。取 $t=1$ 得

$$-v_1-v_2+v_3=0.$$

所以三个向量线性相关，其中 $v_3=v_1+v_2$。

验算　直接按坐标相加可验证；矩阵只有两个主元。

易错　一个非零向量本身独立，但多个非零向量仍可能线性相关。

9.2 从生成向量中筛选一组基

适用　已知某子空间由若干向量生成，需要去掉冗余。

步骤　将生成向量并为矩阵；行化简；取原矩阵的主元列；主元数就是维数。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\1&2&1&2\\1&2&2&3\end{bmatrix}\longrightarrow R=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

主元列为第 1、3 列，所以

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\},\quad \dim\operatorname{span}(v_1,v_2,v_3,v_4)=2.$$

剩余列满足 $v_2=2v_1$、$v_4=v_1+v_3$，可以删去。

验算　保留列独立，删去列仍能由保留列生成，两个条件都满足。

易错　基必须既独立又能生成；不能仅凭向量数量判断是否为基。

9.3 从线性约束计算子空间的基和维数

适用　子空间以满足一组齐次方程的向量集合给出。
步骤　把约束写为 $Ax=0$；消元识别独立约束；参数化并提取参数向量；参数向量独立时就是基。
例题　求 $S=\{x\in\mathbb{R}^4 : Ax=0\}$ 的基，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

约束为 $x_1-x_3+x_4=0$、$x_2+x_3=0$。令 $x_3=s, x_4=t$：

$$x=s\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

所以这两个参数向量构成 S 的一组基，$\dim S=4-2=2$。
验算　两个向量分别满足原来的三条约束；它们的自由分量独立。
易错　第三条约束若由前两条相加得到，就不能再多减一次维数。

9.4 把独立向量补成整个空间的一组基

适用　已知几个独立向量，需要补成整个空间的一组基。
步骤　依次尝试加入标准基向量；只保留能增加秩的列；达到所在空间的维数时停止。
例题　已知 $v_1=(1,1,0)^T$、$v_2=(1,0,1)^T$。尝试加入 $e_1=(1,0,0)^T$，构成主体矩阵

$$B=[v_1\ v_2\ e_1]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

做 $R_2\leftarrow R_2-R_1$、$R_3\leftarrow R_3+R_2$，主元依次为 $1,-1,-1$。因此 $\{v_1,v_2,e_1\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。
验算　三个主元说明三列独立；三个独立方向已经生成 $\mathbb{R}^3$。
易错　不能任意添加一个向量就认为能补全基；添加后秩必须增加。

9.5 求向量在给定基下的表示系数

适用　基向量已给定，需要知道某个向量由它们怎样组合。

步骤　按指定顺序将基向量排成列矩阵 B；解 $Bc = v$；系数列 c 就是该基下的坐标。

例题

$$B = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

方程为 $c_1 + c_2 = 1$、$c_2 + c_3 = 2$、$c_1 + 2c_3 = 8$。用前两式消去 c_1, c_3，第三式变为 $5 - 3c_2 = 8$，因此

$$[v]_{\mathcal{B}} = c = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

验算　$2v_1 - v_2 + 3v_3 = v$。

易错　基向量顺序改变，坐标分量的顺序也会改变；v 的标准坐标通常不同于 $[v]_{\mathcal{B}}$。

Lecture 10：四个基本子空间

对 m×n 矩阵，列空间与左零空间在实 m 维空间中，行空间与零空间在实 n 维空间中。四种基本计算各用独立例题。

10.1 计算列空间 C(A)

适用　求输出方向构成的空间及其维数。

步骤　消元记录主元列号；取原矩阵对应列；维数等于秩。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix}\longrightarrow R=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

第 1、2 列为主元列，所以

$$\mathcal{B}_{C(A)}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \dim C(A)=2.$$

这些基向量有四个分量，因此 $C(A)\subseteq\mathbb{R}^4$；第三列为前两列之和。

验算　两列独立并生成全部三列；$r=2$。

易错　不要把列数 3 当作列空间所在空间的维数；每列的分量数才决定所在空间。

10.2 计算行空间 C(A 的转置)

适用　求所有行向量生成的空间。

步骤　对 A 行化简；取行最简形的所有非零行；若统一写列向量，就把这些行转置。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&1&1\\1&3&2&1\end{bmatrix}\longrightarrow R=\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{B}_{C(A^T)}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \dim C(A^T)=2.$$

每个基向量有四个分量，因此行空间在 $\mathbb{R}^4$ 中。行变换只做可逆行组合，行空间保持不变。

验算　原第一行等于 R 的第一行加两倍第二行；原第二行就是 R 的第二行；第三行是原前两行之和。

易错　行空间可以取 R 的非零行；这条规则不能套用到列空间。

10.3 计算零空间 N(A)

适用　求所有使 $Ax=0$ 的输入向量。

步骤　求 R；为每个自由变量构造一个特殊解；特殊解组成零空间基，维数为 $n-r$。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\0&1&1&2\\1&0&3&2\end{bmatrix}\longrightarrow R=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

由 $x_1+3x_3+2x_4=0$、$x_2+x_3+2x_4=0$ 得

$$\mathcal{B}_{N(A)}=\left\{\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-2\\-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \dim N(A)=4-2=2.$$

零空间在 $\mathbb{R}^4$ 中，因为输入有四个分量。

验算　两个基向量分别满足 $Av=0$；自由分量分别是 $(1,0)$ 与 $(0,1)$。

易错　$N(A)$ 中向量的分量数是列数；不是零行的数量。

10.4 转置后求左零空间 N(A 的转置)

适用　求所有满足 $y^TA=0$ 的行关系，统一把 y 写成列向量。

步骤　先转置；对 $A^Ty=0$ 构造特殊解；所得基向量位于 $\mathbb{R}^m$，维数为 $m-r$。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&3\\2&-1&0\end{bmatrix},\quad \text{rref}(A^T)=\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

自由变量是 y_3,y_4。分别取 $(1,0)$、$(0,1)$：

$$\mathcal{B}_{N(A^T)}=\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \dim N(A^T)=4-2=2.$$

第一个基向量表示原矩阵第 3 行等于前两行之和；第二个表示第 4 行等于第 1 行的两倍减第 2 行。

验算　分别计算 $A^Ty=0$，等价地验证各行的加权和为零。

易错　左零空间不是 $N(A)$；应先转置，未知量个数随之变为行数。

10.5 累计行变换直接提取左零空间

适用　已经对 A 消元，希望同时记录零行来自哪些原始行。

步骤　对 $[A \mid I_m]$ 同步做行变换，得到 $[R \mid E]$；R 中每个零行对应的 E 行转置后，就是左零空间基。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

做 $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$、$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$，最后做 $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$：

$$[A \mid I] \longrightarrow [R \mid E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

第三行左侧为零，取右侧第三行的转置：

$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N(A^T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

本题 $m = n = 3, r = 2$，四个空间的维数依次为 $2, 2, 1, 1$。

验算　$EA = R$，且 $y^T A = 0$；右侧来自可逆行操作，取出的零行关系相互独立。

易错　只有把整个行变换同步作用于单位矩阵，右侧才能正确记录系数。

Lecture 11：把矩阵视为向量：矩阵子空间

本讲仅保留矩阵子空间的基与维数。这里的“向量”是整个矩阵，线性组合仍按对应元素进行。

11.1 参数化矩阵子空间并提取基

适用　矩阵集合的各元素满足线性约束，或整个矩阵由若干参数描述。

步骤　先用互相独立的参数表示所有元素；对每个参数提取一个系数矩阵；检查系数矩阵独立，数量就是维数。

例题　求以下矩阵空间的基和维数：

$$S=\left\{\begin{bmatrix}a & b & c\\ b & a & 0\\ c & 0 & a\end{bmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

逐参数拆开：

$$X=a\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

三块矩阵都属于 S，并生成任意 X。若 $\alpha B_1+\beta B_2+\gamma B_3=0$，依次看 $(1,1),(1,2),(1,3)$ 元，得到 $\alpha=\beta=\gamma=0$。因此 $\{B_1,B_2,B_3\}$ 是基，$\dim S=3$。

一般情况下，也可按固定顺序把每个 3×3 矩阵展开为九维列向量，然后用消元判断这些矩阵是否独立。

验算　将任意参数代入拆分式可恢复原矩阵；三块系数矩阵没有非平凡零组合。

易错　这里求的是矩阵空间的维数，不是某一个 3×3 矩阵的秩；两者不能混同。

Lecture 14：正交向量与正交子空间

从本讲继续使用 MIT 原讲次编号。正交计算的核心是内积为零；子空间问题只需检查一组生成向量。

14.1 用内积判断向量是否正交

适用　判断实向量之间是否垂直。

步骤　对应分量相乘再求和；内积为零则正交，长度不必为 1。

例题

$$u=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix},\quad w=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}u^Tv&=1\times2+2\times(-1)+(-1)\times0=0,\\u^Tw&=1\times1+2\times0+(-1)\times1=0,\\v^Tw&=2\times1+(-1)\times0+0\times1=2.\end{aligned}$$

所以 $u\perp v$、$u\perp w$，但 v,w 不正交。

验算　内积对调次序不变；$u^Tu=6$，因此 u 不是单位向量。

易错　与同一个向量正交的两个向量，不一定彼此正交。

14.2 用生成矩阵判断两个子空间正交

适用　两个子空间各有一组生成向量；这些向量不必本身都是基。

步骤　把生成向量分别排成列矩阵 A,B；计算 A^TB；整个乘积为零才表示每对方向都正交。

例题　令 $U=C(A),V=C(B)$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}.$$

$$A^TB=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

因此 $U\perp V$。本题两矩阵都秩为 2，且 $2+2=4$，所以进一步得到 $V=U^{\perp}$。

验算　任取 $u=A\alpha,v=B\beta$，都有 $u^Tv=\alpha^TA^TB\beta=0$。

易错　只检验一对向量不够；要断言互为正交补，还需维数相加等于环境维数。

14.3 把求正交补转化为求零空间

适用　已知子空间由若干向量生成，要找与其中所有向量都正交的方向。

步骤　把生成向量放成列矩阵 A；解 $A^T y = 0$，即 $C(A)^\perp = N(A^T)$。

例题　设 $S = C(A)$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{rref}(A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令自由变量 $y_3 = s, y_4 = t$，得

$$y = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

所以两参数向量构成 $S^\perp$ 的基，$\dim S^\perp = 4 - 2 = 2$。

验算　两基向量与 A 的每一列内积均为零；维数之和为 4。

易错　与列空间正交用 A^T；若求行空间的正交补，应解 $Ax = 0$。

14.4 验证四个子空间的正交关系并判断可解性

适用 需要联系行空间、列空间和两个零空间，或检查 $Ax=b$ 是否相容。

步骤 行空间的基与零空间基逐对内积；列空间基与左零空间基逐对内积。可解性要求 b 与整个左零空间正交。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&1&3\end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{B}_{C(A^T)}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \mathcal{B}_{N(A)}=\left\{\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

零空间基与两行空间基的内积分别为 $-2+2=0$、$-1+1=0$，所以 $C(A^T)^\perp=N(A)$。再看

$$\mathcal{B}_{C(A)}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \mathcal{B}_{N(A^T)}=\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

左零空间基 $y=(-1,-1,1)^T$ 与两个列空间基内积都为零，且两个空间的维数为 2 和 1，因此 $C(A)^\perp=N(A^T)$。

对 $b=(2,1,3)^T$，$y^Tb=-2-1+3=0$，所以有解，例如 $x=(2,1,0)^T$；对 $c=(2,1,4)^T$，$y^Tc=1\neq 0$，所以无解。

验算 两对空间的维数都加起来等于 3；直接检查 $Ax=b$。

易错 左零空间维数大于 1 时，必须与其所有基向量正交，不能只查一个。

Lecture 15：投影到子空间

投影寻找子空间中离给定向量最近的点。计算完成后，最重要的检查是误差与目标子空间正交。

15.1 投影到一条直线

适用　目标直线经过原点，方向向量 $a \neq 0$。

步骤　先求投影系数 $\hat{x} = (a^T b)/(a^T a)$；再求 $p = a\hat{x}$；最后求误差 $e = b - p$。

例题

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\hat{x} = \frac{a^T b}{a^T a} = \frac{3+0+6}{1+4+4} = 1,$$

$$p = a\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad e = b - p = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

系数 $\hat{x}$ 是标量，投影 p 与误差 e 都是三维向量。

验算　$a^T e = 2 - 4 + 2 = 0$。任意直线上点 ta 满足 $\|b - ta\|^2 = \|e\|^2 + \|p - ta\|^2$，故 p 最近。

易错　分母是 $a^T a$，不是 $\|a\|$；目标直线若不经过原点，应先平移。

15.2 投影到具有正交基的子空间

适用　已知子空间的一组非零正交基；这些向量未必单位化。

步骤　分别求每个基方向上的投影，再相加：$p = \sum_i u_i(u_i^T b)/(u_i^T u_i)$。

例题　设 $S = C(A)$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

第三列是前两列之和，前两列 $u = (1,1,0)^T$、$v = (1,-1,2)^T$ 是一组正交基，因为 $u^T v = 0$。分别计算

$$\frac{u^T b}{u^T u} = \frac{2}{2} = 1, \qquad \frac{v^T b}{v^T v} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$p = u + \frac{4}{3}v = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}, \quad e = b - p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

验算　$u^T e = 0$、$v^T e = 0$，所以误差与整个 S 正交。

易错　只能对一组正交基直接分方向相加；不能把生成矩阵中相关的第三列也再投影一次。

15.3 通过正规方程投影到一般列空间

适用　目标空间由满列秩矩阵 A 的列生成，列向量不必正交。

步骤　令 $p = A\hat{x}$；由误差正交 $A^T(b - A\hat{x}) = 0$ 建立正规方程；解系数后回乘 A。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

前面三行已保证三列独立。计算

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^Tb = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

正规方程为 $2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 3$、$\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 4$、$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 = 5$。令 $q = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3$，有 $\hat{x}_1 + q = 3$、$\hat{x}_2 + q = 4$、$\hat{x}_3 + q = 5$；相加得到 $4q = 12$。于是

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad p = A\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad e = b - p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

本例 $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$，而 $p, e \in \mathbb{R}^4$，两种对象的维数不同。

验算　$A^Te = 0$；误差不为零，说明 b 不在列空间。A^TA 可逆来自列满秩。

易错　不要把正规方程写成 $AA^T\hat{x} = Ab$；实际计算优先解方程，不必显式求逆。

Lecture 16：投影矩阵与最小二乘

本讲将投影写成矩阵，并用正规方程计算最小二乘解及直线拟合。

16.1 计算向一条直线投影的矩阵

适用 目标直线是 span$\{a\}$，其中 $a \neq 0$。

步骤 先计算外积 aa^T 和标量 a^Ta；求 $P = aa^T/(a^Ta)$；最后用 $p = Pb$ 得到投影。

例题

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

计算 $a^Ta = 6$，因此

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \qquad p = Pb = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix}, \quad e = b - p = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{11}{6} \end{bmatrix}.$$

此处 aa^T 是 3×3 矩阵，而 a^Ta 是标量。

验算 直接相乘有 $P^2 = P$、$P^T = P$；且 $a^Te = 0$。

易错 不要把外积 aa^T 与内积 a^Ta 混淆；分母要求 $a \neq 0$。

16.2 计算向列空间投影的矩阵

适用　A 的列线性无关，需要把 b 投影到 $C(A)$。

步骤　计算 A^TA；求 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$；计算 $p = Pb$、$e = b - p$。

例题

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

前 3 行为单位矩阵，因此 A 列满秩。计算

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

因为 A 是 4×3，P 是 4×4。再计算

$$p = Pb = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \\ 3 \\ \frac{25}{6} \end{bmatrix}, \qquad e = b - p = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

验算　$P^T = P$、$P^2 = P$；代入计算得 $A^Te = 0$。

易错　必须先确认列满秩；否则 A^TA 不可逆，不能直接套用这个逆矩阵公式。

16.3 计算向正交补的投影

适用　已知向子空间 S 正交投影的矩阵 P，要求向 $S^\perp$ 的投影。

步骤　计算 $Q = I - P$；再求 $p = Pb$、$e = Qb$；检查 $b = p + e$。

例题

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因此

$$Q = I - P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad p = Pb = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e = Qb = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

例如取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，其列空间恰为 S，而 $S^\perp = \text{span}\{(1, -1, 1)^T\}$。

验算　$p + e = b$，$Pe = 0$、$Qp = 0$，且 $p^Te = 0$；$Q^2 = Q$。

易错　$I - P$ 投影到正交补，不是一般意义上的矩阵逆；投影矩阵通常不可逆。

16.4 求不相容方程组的最小二乘解

适用　$Ax=b$ 无解，需要使 $\|Ax-b\|^2$ 最小；本题 A 列满秩。

步骤　求 A^TA 与 A^Tb；解正规方程得到 $\hat{x}$；计算 $p=A\hat{x}$、$e=b-p$ 及 $\|e\|^2$。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\2\end{bmatrix}.$$

原方程前三行要求 $x=(2,0,1)^T$，但第四行左端为 $3\neq 2$，所以无解。

$$A^TA=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix},\quad A^Tb=\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix}.$$

对增广矩阵 $[A^TA\mid A^Tb]$ 做 $R_2\leftarrow R_2+\frac{1}{2}R_1$、$R_3\leftarrow R_3-\frac{1}{2}R_1$，再做 $R_3\leftarrow R_3+\frac{1}{3}R_2$，可自下而上回代得到

$$\hat{x}=\begin{bmatrix}\frac{7}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\end{bmatrix},\quad p=A\hat{x}=\begin{bmatrix}\frac{7}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\\\frac{9}{4}\end{bmatrix},\quad e=b-p=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

$$\|e\|^2=\frac{1}{4}.$$

验算　$A^Te=0$；对任意 x，$\|b-Ax\|^2=\|e\|^2+\|A(\hat{x}-x)\|^2$，所以所得值最小。

易错　$\hat{x}$ 是系数向量，不是投影 p；不要把正规方程的右端写成 b。

16.5 用最小二乘拟合直线

适用 给定数据 (t_i, y_i)，拟合直线 $y = C + Dt$，使纵向残差平方和最小。

步骤 把数据写成 $A(C,D)^T \approx b$；解 $A^TA(C,D)^T = A^Tb$；计算拟合值和残差。

例题 对数据点 $(0,1),(1,2),(2,2),(3,4)$，有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad A^Tb = \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

正规方程是 $4C + 6D = 9$、$6C + 14D = 18$；消去 C 得 $5D = \frac{9}{2}$，回代得到

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{9}{10} \end{bmatrix}, \qquad \hat{y} = C + Dt = \frac{9}{10} + \frac{9}{10}t.$$

$$p = A\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{9}{5} \\ \frac{27}{10} \\ \frac{18}{5} \end{bmatrix}, \quad e = b - p = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{10} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad \|e\|^2 = \frac{7}{10}.$$

每个残差是观测值减对应的拟合值。设计矩阵的两列分别对应截距和斜率。

验算 $\sum_i e_i = 0$、$\sum_i t_i e_i = 0$，即 $A^Te = 0$。

易错 这里最小化纵向残差，而不是点到直线的垂直距离；只有模型含截距时才能据此保证残差之和为零。

16.6 从正交条件判断候选最小二乘解

适用　给定一个候选向量，判断它是否使 $\|Ax-b\|^2$ 最小。

步骤　先算残差 $e_0=b-Ax_0$；再算 A^Te_0。结果为零当且仅当候选解为最小二乘解。

例题

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\4\end{bmatrix},\quad x_0=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

$$e_0=b-Ax_0=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\3\end{bmatrix},\qquad A^Te_0=\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix}\neq 0.$$

所以 x_0 不是最小二乘解。解正规方程得到

$$\hat{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\\frac{5}{4}\\\frac{5}{2}\end{bmatrix},\quad e=b-A\hat{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

验算　$A^Te=0$，故 $\hat{x}$ 最优；本题 A 列满秩，所以最优系数唯一。由于 $e\neq 0$，原方程组无精确解。

易错　最小二乘解的残差未必为零；必须区分 $A^Te=0$ 与 $e=0$。

18.06

线性代数计算笔记

方程组 • 子空间 • 最小二乘

Version 1.0 / 2026.11.03