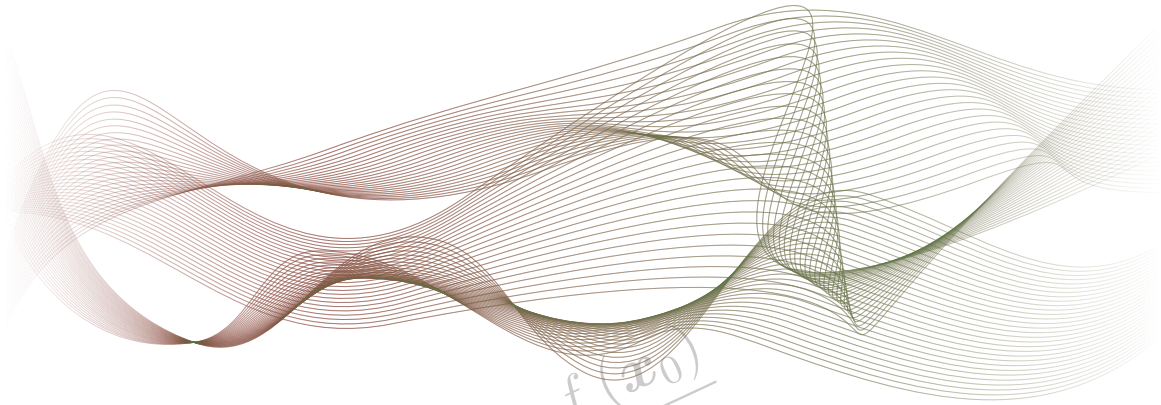
彭康书院学业辅导与发展中心 · 真题集系列



高等数学（上）
期中真题解析

彭康书院学业辅导与发展中心 · 资料编写组

彭·高数 2026 版上册期中试题解析

目录（可点击跳转）

2025	1
2024	6
2023	12
2022	17
2021	19
2020	23
2019	25
2018	28
2017	30
2016	32
2015	35
2014	38
2013	41

欢迎关注学导团
bilibili 站账号

欢迎加入彭小帮
QQ:1054326873

彭康学导团

2025-2026 高数上期中试题解析

一、单选题

1. A

解析. 当 n 为奇数且 $n \to +\infty$ 时，$\frac{n^2+\sqrt{n}}{n} \to +\infty$; 当 n 为偶数且 $n \to +\infty$ 时，$\frac{1}{n} \to 0$.

故 $n \to \infty$ 时，$\{a_n\}$ 的极限不存在，但它是一个无界变量. □

2. D

解析.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}(\frac{f(x)+\sin x}{x} - \frac{\sin x}{x}) = 1$$

□

3. B

解析.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \arctan\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

并且

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \arctan\frac{1}{x} = \frac{1-0}{1+0}(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$

□

4. C

解析. $f(x)$ 单调递增，故而 $f'(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. □

5. D

解析. A 选项：必要性成立，充分性不成立. 反例：$\lim\limits_{x\to -1} |x| = |1|$, 但 $\lim\limits_{x\to -1} x = 1$ 并不成立；

B 选项：反例：$\lim\limits_{x\to 0}(\tan\frac{1}{x})(\frac{x}{\tan\frac{1}{x}}) = 0$ 但是括号里的两个函数当 $x \to 0$ 时的极限不存在.

C 选项：反例：$f(x) = x\sin\frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$，可以自行验证 $x \to 0$ 是满足条件而不满足结论;

D 选项显然正确. □

6. C

解析. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2} = 0$(有界量乘以无穷小量). 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 而

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}}{x} = \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\sqrt{|x|}}$$

该极限不存在. □

二、填空题

1. $y'=\left(-f'(-x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{f'(\sqrt{x})}{f(\sqrt{x})}\right)f(\sqrt{x})\,e^{f(-x)}$

解析.

$$\ln y=f(-x)+\ln\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)$$
$$\frac{y'}{y}=-f'(-x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{f'(\sqrt{x})}{f(\sqrt{x})}$$
$$y'=\left(-f'(-x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{f'(\sqrt{x})}{f(\sqrt{x})}\right)f\left(\sqrt{x}\right)e^{f(-x)}$$

□

2. e

解析. $\lim\limits_{x\to1}e^x-b=0\implies b=e$ □

3. -2

解析.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin2x+e^{2ax}-1}{x}=2+2a=a\implies a=-2$$

□

4. $y-1=\frac{e}{2}(x-3)$

解析. 当 $t=0$ 时, $x=3,y=1$.

一阶导: $e^t(\cos t+\sin t\dot{y})-\dot{y}=0\implies\dot{y}=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$, $\dot{y}(0)=e$

$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y\cos t}{(1-e^y\sin t)(6t+2)}$ $\frac{dy}{dx}\big|_{t=0}=\frac{e}{2}$ 那么切线方程 $y-1=\frac{e}{2}(x-3)$ □

5. $k=2,\mu=\frac{3}{4}$

解析.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{\left(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}\right)}\cdot\frac{1}{x^k}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{2x^k}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x^k}+\frac{\arcsin x}{2x^{k-1}}$$

$k=2$ 时极限存在且为 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$, 故 $k=2,\mu=\frac{3}{4}$ □

6. $y=0$

三、计算题

彭康学导因

1. 3

解析.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f\left(\sin^2x\right)}{x^4}&=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t^2}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{f''(0)}{2}t^2+o\left(t^2\right)}{t^2}=3\end{aligned}$$

□

2. **解析.** 硬求导，没什么好说的

$$\begin{aligned}y'=&\frac{1}{(1+1+x^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\ln x}{x^2-1}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\\=&\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{x^2+1}}-\frac{x^2-1-x^2\ln x}{x\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\end{aligned}$$

□

3. **解析.** 方法一：

$$\begin{aligned}f'(x)=&\frac{2}{3}\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}\frac{(x^2-1)^2-x^4}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}\left((x^2-1)^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{8}{3}}\right)}\\=&\frac{2}{3}\frac{1-2x^2}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}\left((x^2-1)^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{8}{3}}\right)}\end{aligned}$$

使用了立方差公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

注意到分母除 $x^{\frac{1}{3}}$ 外的项均为正，得单调增区间为 $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$f(x)$ 单调减区间为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$，在 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 有极大值 $\sqrt[3]{4}$，在 $x=0$ 有极小值 1；

方法二：

原函数为偶函数，故只需考虑 $x\geq0$ 的部分 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$，做换元 $x=t^{\frac{3}{2}}$，得到

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(1-t^2(t^3-1)^{-\frac{1}{3}})\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\frac{(t^3-1)^{\frac{2}{3}}-t^2}{\sqrt{t}(t^3-1)^{\frac{2}{3}}}$$

令 $f'(x)\geq0$ 得到

$$(t^3-1)^{\frac{2}{3}}\geq t^2$$

即

$$(t^3-1)^2\geq t^6$$

$$t^3\leq\frac{1}{2}$$

得到 $\sqrt{x}\leq\frac{1}{2}$ 故 $x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ 同理可得 $f'(x)\leq0$ 可解得 $x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$，故而单调递减区间为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},0),(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 单调递增区间为 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}),(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 可以求得极大极小值. □

彭康学导因

4. $-\frac{45}{16}$

解析. 奇函数的偶数阶导数为奇函数，所以只需看后一项

使用泰勒展开

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-4} &= -\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} \\ &= -\frac{1}{4}\left(1+\frac{x^2}{4}+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2+\left(\frac{x^2}{4}\right)^3+\ldots\right)\end{aligned}$$

六次方项系数为 $-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=-\frac{1}{256}$, 故 $y^{(6)}(0)=-\frac{6!}{256}=-\frac{45}{16}$

□

5. $F(x)=\pi x f'(x), F'(x)=\pi\left(f'(x)+xf''(x)\right)$

解析.

$$\begin{aligned}F(x) &= \lim_{t\to\infty} t^2\left[f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]\sin\frac{x}{t} \\ &= \lim_{t\to\infty}\pi x\cdot\frac{f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)}{\frac{\pi}{t}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}} \\ &= \pi x f'(x) \\ F'(x) &= \pi\left(f'(x)+xf''(x)\right)\end{aligned}$$

□

6. 见解析

解析.

$$\begin{aligned}|x_m-x_n| &= |x_m-x_{m-1}+x_{m-1}-x_{m-2}+\ldots+x_{n+1}-x_n| \\ &\le |x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\ldots+|x_{n+1}-x_n| \\ &\le \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}\left(1-\frac{1}{3^{m-n}}\right)\end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon>0$, 要使 $|x_m-x_n|<\varepsilon$, 只需: $\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}<\varepsilon \Longrightarrow 3^{n-1}>\frac{1}{2\varepsilon} \Longrightarrow n>1+\log_3\frac{1}{2\varepsilon}$

取 $N=\left\lfloor 1+\log_3\frac{1}{2\varepsilon}\right\rfloor+1$, 则当 $m>n>N$ 时，必有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$。因此，数列 $\{x_n\}$ 是柯西数列，而实数集内柯西数列必收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. □

四、证明题

解析.

(1) 显然当 $x>0$ 时 $f(x)$ 单调递减，而且 $f(0)=\frac{3}{2}>1, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0<1$, 故在 $(0,+\infty)$ 上方程 $f(x)=1$ 有且只有一个解.

(2)

$$f(\frac{1}{a})=\frac{a}{a+1}+\frac{1}{1+a^{\frac{1}{a}}}\ge\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}=1$$

$$f(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{a+1}\le 1$$

故而 $\frac{1}{a}<x_0<1$, 故由夹逼定理，当 $a\to 1^+$ 时，$x_0\to 1$.

□

五. 证明题

解析. 设 $F(x)=\mathrm{e}^{-g(x)}(f(x)-6x)$, 则 $F(0)=\mathrm{e}^{-g(0)}f(0)>0, F(1)=\mathrm{e}^{-g(1)}(f(1)-6)<0$ 故由介值定理, 存在 $\eta\in(0,1), s.t. F(\eta)=0$，而 $F(6)=0$，由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(0,6)$,s.t.

$$F'(\xi)=\mathrm{e}^{-g(\xi)}[f'(\xi)-6-g'(\xi)(f(\xi)-6\xi)]=0$$

故结论成立.

□

彭康学导因

2024 高数上期中试题解析

一、单选题

1. (D)

解析.

(A)(B) 仅要求 $|u_n - A|$ 越来越小或接近 0 是不够的. 考虑 $u_n = \frac{1}{n}$, $A = -1$, $|u_n - A| = |\frac{1}{n} - (-1)| = \frac{1}{n} + 1$ 越来越小, 但 $\{u_n\}$ 并不以 -1 为极限, 故 (A)(B) 错误.

(C) 考虑 $u_n = (-1)^n, A = 1, \forall \varepsilon > 0, |u_n - A| = |(-1)^n - 1|$ 中总有无穷项小于 ε, 但 $\{u_n\}$ 发散, 故 (C) 错误. □

2. (D)

解析. 因函数 $f(x)$ 在整个数轴上连续, 故有 $a + e^{bx} \neq 0$, 故 $a \geq 0$; 又因 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, 则必有当 $x \to -\infty$ 时, $a + e^{bx} \to +\infty$, 所以 $b < 0$, 故 (D) 是正确的. □

3. (B)

解析. $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} \cdot (x - a) = -1 \cdot 0 = 0$, 又在 a 的某一去心邻域内有 $\dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} < 0, f(x) < f(a)$, 所以 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得极大值, 故 (B) 正确. □

4. (B)

解析. 由 $f(x) = (x^2 - x - 2)\left|x^3 - x\right| = (x - 2)(x + 1)|x(x - 1)(x + 1)|$, 所以不可导的点只可能是 $x = -1, x = 0, x = 1$.

利用导数定义, 当 $x = 1$ 时,

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-4|x - 1|}{x - 1}, f'_-(1) = 4 \neq f'_+(1) = -4,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导;

类似可证 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处也不可导;

$x = -1$ 时,

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x - 2)|x(x - 1)(x + 1)| = 0,$$

故 $f(x)$ 在点 $x = -1$ 处可导。因此, 函数 $f(x)$ 不可导点的个数为 2 , 故 (B) 正确. □

5. (D)

解析. $y = \dfrac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$, 当 $x \to 0, y \to \infty$, 故有铅直渐近线 $x = 0$; 当 $x \to \infty, y \to 1$, 故有水平渐近线 $y = -1$, 故 (D) 正确. □

6. (C)

解析. 由 $f'(0)=0$ 可知, 可导函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 上达到极值的必要条件, 再由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$ 知, 在 $x=0$ 的空心邻域内, $f''(x)>0$, 故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 又因 $f''(x)$ 在 $x=0$ 两侧不变号, 故 $(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 故选 (C). □

二、填空题

1. 1

解析. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $a\in\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(\sin n)^2}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(\sin n)^2}\ge\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, 夹逼即得极限为 1. □

2. $2b\varphi'(a)$

解析.

$$\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)-0}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a-bx)-\varphi(a)}{x}\\
&=b\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a)}{bx}+b\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a-bx)-\varphi(a)}{-bx}\\
&=b\varphi'(a)+b\varphi'(a)=2b\varphi'(a).
\end{aligned}$$

□

3. -1

解析. 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, 其中

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}f(x)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{x\cdot\frac{x}{4}}\\
&\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{a\mathrm{e}^{ax}+2x-a}{\frac{x}{2}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{a^2\mathrm{e}^{ax}+2}{\frac{1}{2}}=2a^2+4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-}f(x)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln\left(1+ax^3\right)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}\\
&\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}\\
&=-\lim_{x\to 0^-}3a\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)=-6a,
\end{aligned}$$

故 $6=-6a=2a^2+4$, 解得 $a=-1$. □

4. 1

解析.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

综上 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$=1. □

5. $\mathrm{e}^{\sin x}\left(\cos x\sin \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}\cos \mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x$

解析.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\sin x}\sin \mathrm{e}^{x}=\sin \mathrm{e}^{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{\sin x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin \mathrm{e}^{x}\right)\\&=\sin \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\sin x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin x\right)+\mathrm{e}^{\sin x}\cos \mathrm{e}^{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x}\\&=\sin \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\sin x}\cos x+\mathrm{e}^{\sin x}\cos \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x}\\&=\mathrm{e}^{\sin x}\left(\cos x\sin \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}\cos \mathrm{e}^{x}\right)\end{aligned}$$

故 $\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\sin x}\left(\cos x\sin \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}\cos \mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x$ □

6. e^{-8}

解析. 令 $A=\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x^2\sin\left(\frac{2}{x}\right)}$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln A&=\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{2}{x}\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{2}{x}\ln\left(1-\frac{4}{x+3}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}x^2\frac{2}{x}\left(-\frac{4}{x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-8x}{x+3}=-8\end{aligned}$$

故原极限 $\lim\limits_{x\to\infty}A=\exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\ln A\right)=\mathrm{e}^{-8}$. □

三、计算题

1. **解析.**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=3t^2+5t+2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$$

□

彭康学导因

2. **解析.** 由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$.

设对某正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$, 则有 $x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$, 由归纳法知: $x_n>x_{n+1}, n\in\mathbb{N}^*$, 即 $\{x_n\}$ 为单调递减数列.

由 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$, 显见 $x_n>0, n\in\mathbb{N}^*$, 即 $\{x_n\}$ 有下界.

根据单调有界数列必有极限, 知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限, 得 $a=\sqrt{6+a}$, 解得 $a=3$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$. □

3. **解析.** $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点为 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$.

• 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处, $f\left(\dfrac{\pi}{4}^+\right)=+\infty$, 在 $x=\dfrac{5}{4}\pi$ 处, $f\left(\dfrac{5\pi}{4}^+\right)=+\infty$, 故 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$ 为第二类间断点 (无穷间断点);

• 在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 处, $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$, 在 $x=\dfrac{7}{4}\pi$ 处, $\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$, 故 $x=\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$ 为第一类间断点 (可去间断点). □

4. **解析.**

证法 1 因为当 $h\to0$ 时, $\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小, 故其本身也是无穷小, 即

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to0}\left[\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)\right]\\&=\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1\right)f(0)\end{aligned}$$

而 $f(0)\neq0$, 所以得 $\qquad\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1=0$

又

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to0}\frac{\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)}{h^2}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{h\to0}\frac{\lambda_1f'(h)+2\lambda_2f'(2h)+3\lambda_3f'(3h)}{2h}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{h\to0}\frac{1}{2}\left[\lambda_1f''(h)+4\lambda_2f''(2h)+9\lambda_3f''(3h)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3\right)f''(0),\end{aligned}$$

因为 $f''(0)\neq0$, 故得 $\qquad\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0$

其中还包含

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to0}\left[\lambda_1f'(h)+2\lambda_2f'(2h)+3\lambda_3f'(3h)\right]\\&=\left(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3\right)f'(0),\end{aligned}$$

因为 $f'(0)\neq0$, 得 $\qquad\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0$

综上所述, 得 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

因其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

故由克拉默法则知, 存在唯一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得当 $h \to 0$ 时, $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

证法 2 利用泰勒公式.

$$\begin{aligned} & \lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0) \\ =& \lambda_1 \left[f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2} f''(0)h^2 + o\left(h^2\right) \right] + \lambda_2 \left[f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + o\left(h^2\right) \right] + \\ & \lambda_3 \left[f(0) + 3f'(0)h + \frac{9}{2} f''(0)h^2 + o\left(h^2\right) \right] - f(0) \\ =& \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1\right) f(0) + \left(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3\right) f'(0)h + \frac{\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3}{2} f''(0)h^2 + o\left(h^2\right) \\ =& o\left(h^2\right). \end{aligned}$$

故有 $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0, \end{cases}$ 又其系数行列式 (范德蒙德行列式) 不为 0(为 2), 根据克拉默法则, 可知方程组有唯一解, 即存在唯一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足条件. □

5. **解析.** 取 $F(x) = f(x) - g(x), G(x) = f(x) + g(x), x \in (a, +\infty)$.
由 $|f'(x)| < g'(x)$ 知

$$f'(x) - g'(x) < 0, \quad f'(x) + g'(x) > 0,$$

故 $F'(x) = f'(x) - g'(x) < 0, G'(x) = f'(x) + g'(x) > 0$,
即当 $x > a$ 时函数 $F(x)$ 单调减少, $G(x)$ 单调增加. 因此

$$F(x) < F(a), \quad G(x) > G(a) \quad (x > a).$$

从而 $f(x) - g(x) < f(a) - g(a), f(x) + g(x) > f(a) + g(a) \quad (x > a)$.
即当 $x > a$ 时, $|f(x) - f(a)| < g(x) - g(a)$. □

四、 解析.

定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,
令 $y'=1-\dfrac{8}{x^3}=0$, 得驻点 $x=2$, 不可导点 $x=0, y''=\dfrac{24}{x^4}>0$,
所以单调增区间为 $(-\infty,0),(2,+\infty)$, 单调减区间为 $(0,2)$, 极小值为 $f(2)=3$, 无拐点, 凹区间 $(-\infty,\cup(0,+\infty)$.

□

五、 解析.

假设 $P(x)=a_1x^2+a_2x+a_3$ 满足 $P(-1)=\dfrac{1}{3}, P(0)=\dfrac{1}{6}, P(2)=\dfrac{17}{6}$, 则可得 $P(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{6}$.
令 $\varphi(x)=f(x)-P(x)$, 则 $\varphi(-1)=\varphi(0)=\varphi(2)=0$, 且 $\varphi(x)$ 在区间 $[-1,0],[0,2]$ 上满足罗尔定理条件, 从而存在 $\xi_1\in(-1,0), \xi_2\in(0,2)$, 使得 $\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$.

又 $\varphi'(x)=f'(x)-P'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理条件, 从而至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得 $\varphi''(\xi)=0$, 而 $\varphi''(x)=f''(x)-P''(x)=f''(x)-1$, 所以至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,2)$, 使得 $f''(\xi)=1$.

□

彭康学导因

2023-2024 高数上期中试题解析

一、单选题

1. (A)

解析.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^5+3n^2+6n+1}{3n^5+6n^4+n^3+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n^3}+\frac{6}{n^4}+\frac{1}{n^5}}{3+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}}$$
$$=\frac{4}{3}$$

故选 (A). □

2. (D)

解析.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x}}=1$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x-1}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x}}=-1\neq 1$$

故选 (D). □

3. (B)

解析. 易知函数 $\arctan x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 故极限为无穷小量乘有界量, 极限为 0, 即 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$
故为可去间断点, 故选 (B). □

4. (C)

解析.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=1$$

故选 (C). □

5. (C)

解析. 由 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f\left(h^2\right)}{h^2}=1$ 及 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性知 $f(0)=0$,

$$1=\lim_{h\to0}\frac{f\left(h^2\right)}{h^2}=\lim_{h^2\to0}\frac{f\left(h^2\right)-f(0)}{h^2-0}=f'_+(0),$$

故选 (C). □

6. (B)

解析.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2+x^4}-1}{x^k} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+x^4-1}{x^k\left(\sqrt{1+x^2+x^4}+1\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^k}\end{aligned}$$

故 $k=2$, 故选 (B). □

二、填空题

1. 2

解析. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin 2x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}x=0;\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$ 为有界函数, 故有 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

根据等价无穷小有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$

故有 $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin 2x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=0+2=2.$ □

2. $-f'(x_0)$

解析.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{x}\\ &= -2\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}\\ &= -2f'(x_0)+f'(x_0)\\ &= -f'(x_0)\end{aligned}$$

□

3. $-\dfrac{1}{2}$

解析. 根据函数连续的定义可知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, 则有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, 又

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{a}{1}=a,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{a}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-1}{\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}+2}=-\frac{1}{2}$$

故有 $a=-\dfrac{1}{2}$. □

4. $\dfrac{1}{2}$

解析.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\left(\mathrm{e}^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^2\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

□

5. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x$

解析.

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1+x+\sqrt{x^2+2x}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1+\frac{1}{2}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}}}{1+x+\sqrt{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+1}{\sqrt{x^2+2x}}}{1+x+\sqrt{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x$$

□

6. e^2

解析.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+x}{3+x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)^{2x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}\cdot\frac{4}{x}\cdot 2x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot 2x}}=\frac{\mathrm{e}^8}{\mathrm{e}^6}=\mathrm{e}^2$$

□

三、计算题

1. 解析.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\frac{1}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

□

2. 解析. 由 $f(x)$ 可导得 $f(x)$ 连续, 由 $f\left(2^+\right)=2a+b, f\left(2^-\right)=\mathrm{e}^2$ 得 $\mathrm{e}^2=2a+b$ 又有 $f'_+(2)=a, f'_-(2)=\mathrm{e}^2$ 由可导的性质得出 $\mathrm{e}^2=a$, 再解得 $b=-\mathrm{e}^2$. □

3. 解析. 易知 $f(x)$ 的间断点为 $x=0, x=\pm 1$,

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin x}{x\left|x^2-1\right|}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)x}{x\left|x^2-1\right|}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{\left|x^2-1\right|}=1$$

故 $x=0$ 为函数的可去间断点;

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\sin x}{x\left|x+1\right|}\frac{1}{|x-1|}=\infty$$

故 $x=1$ 为函数的无穷间断点;

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)\sin x}{x(x+1)(1-x)}=\lim_{x\to -1^-}\frac{\sin x}{x(1-x)}=\frac{\sin 1}{2}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)\sin x}{x(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\sin x}{x(x-1)}=\frac{-\sin 1}{2}$$

故 $x=-1$ 为函数的跳跃间断点.

综上, 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$. 分别为可去间断点, 无穷间断点, 跳跃间断点. □

4. **解析.** $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\arctan x}{x}=f'(\xi)=\dfrac{1}{1+\xi^2}$, 故 $\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\cdot\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$

□

5. **解析.** 由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值等于 -1 知, $\exists a\in(0,1)$, 使得 $f(a)=-1, f'(a)=0$. 将 $f(x)$ 在 $x=a$ 点作泰勒展开

$$\begin{aligned} f(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2\\ &=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,\quad \xi\text{ 在}a\text{ 与}x\text{ 之间.}\end{aligned}$$

若 $0<a<\dfrac{1}{2}$, 令 $x=0$, 得

$$0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}a^2,\quad 0<\xi_1<a$$

故 $f''(\xi_1)=\dfrac{2}{a^2}\geq 8$;

若 $\dfrac{1}{2}\leq a<1$, 令 $x=1$, 得

$$0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2,\quad a<\xi_2<1$$

故 $f''(\xi_1)=\dfrac{2}{(1-a)^2}\geq 8$. □

四、 **解析.** 求得 $y'=\dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, y''=\dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$, 可列表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	+	0	+	-	0	+
y''	-	0	+	+	+	+

可得单调增区间 $(-\infty,-1),(5,+\infty)$, 单调减区间 $(-1,1),(1,5)$; 极小值 $y(5)=\dfrac{27}{2}$; 凸区间 $(-\infty,-1)$, 凹区间 $(-1,1),(1,5),(5,+\infty)$; 拐点 $(-1,0)$.

易得曲线有铅直渐近线 $x=1$; 由

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+1}{(x-1)^2}=5$$

得斜渐近线 $y=x+5$. □

五、 解析.

(I) 令 $g(x)=f(x)+x-1$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $g(0)=-1<0, g(1)=1>0$, 根据连续函数的零点存在定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $g(\xi)=f(\xi)+\xi-1=0$, 即 $f(\xi)=1-\xi$.

(II) 由于函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\eta\in(0,\xi)\subset(0,1), \zeta\in(\xi,1)\subset(0,1)$, 使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi},$$
$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-(1-\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi},$$

即有

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

□

彭康学导因

2022 年高数上期中试题答案

一、单选题

1. D
2. A
3. C
4. B
5. C

二、填空题

1. $(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{(2x-1)^2})\mathrm{d}x$
2. 2
3. $\frac{1}{6}$
4. $\frac{(-1)^{n+3}}{n-2}$
5. $\frac{2}{3}$

三、计算(每小题 8 分, 共 48 分)

1. $y'=\left(e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x\right)\arctan\sqrt{x^2-1}+e^{\sin x^2}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$ (6分)
$=2x\cos x^2e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}e^{\sin x^2}$ (8 分)

2. $f(x)$ 定义域为$(-\infty,+\infty)\$.\ \$f'(x)=\frac{1}{3}\left(6x^2-x^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(12x-3x^2\right)$, 或 $\frac{4-x}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(6-x)^2}}$ (2 分)
$f''(x)=-\frac{8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$, (4 分) 当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,6)$ 时, $f''(x)<0$; 当 $x\in(6,+\infty)$ 时, $f''(x)>0$.
(6 分) 该曲线 $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ 的凹凸性与拐点列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f''(x)$	-	∞	-	-	-	∞	+
$f(x)$	凸		凸	凸	凸	拐点 $(6,0)$	凹

凹区间为 $(6,+\infty)$, 拐点为 $(6,0)$ (8 分) 注: 点 $(0,0)$ 不是该曲线的拐点.

3. 由题知 $c\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c}$ (3 分) 由 Lagrange 中值定理知,
$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\cdot 1$, ξ 介于 $x-1$ 与 x 之间(6 分) 故 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)=e$.
故 $e^{2c}=e$, $c=\frac{1}{2}$. (8 分)

4. 令 $y=1-x$, 则
$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{y\to0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi y\sin\pi y}=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{y\to0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi^2y^2}$ (2

分)$=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{y\to0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi y}{2\pi^2y}$ (4 分) $=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{y\to0^+}\frac{\pi^2\sin\pi xy}{2\pi^2}=\frac{1}{\pi}$ (6 分) 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上连续, 故定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$ 就可使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续。(8 分)

5. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x}{2+x^2-e^{tx}}=\begin{cases}\frac{x}{2+x^2}, & x<0\\ 0, & x\geqslant0\end{cases}$ (2 分) 当 $x>0$ 时, $f'(x)=0$, (3 分) 当 $x<0$ 时, $f'(x)=\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$; (4 分) 当 $x=0$ 时,

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{0-0}{x-0}=0, f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{x}{2+x^2}-0}{x-0}=\frac{1}{2}\neq f'_+(0)$ (6 分) 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,

综上, $f'(x)=\begin{cases}\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}, & x<0,\\ 0, & x>0,\end{cases}$ (8 分)

6. 方程 $te^y=y$ 两边对 t 求导, 悍 $e^y+te^y\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dt^2}$, 整理得 $\frac{dy}{dt}=\frac{e^y}{1-y'}$ (2 分) 由 $x=t^2+2t$, 得 $\frac{dx}{dt}=2t+2$, (4 分) 所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{e^y}{2(1-y)(t+1)}$ (6 分)

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{e^y\frac{dy}{dt}(t+1)(1-y)-e^y\left[(1-y)-(t+1)\frac{dy}{dt}\right]}{4(t+1)^3(1-y)^2}$ 又 $y|_{t=0}=0$, $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=1$, 所以 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{1}{4}$. (8 分)

四. (12 分)

解: (1) (本小题 6 分) 由 $0<x_1<\pi$, 得 $0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$; 设 $0<x_n<\pi$, (4 分) 记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 由 $x_{n+1}=\sin x_n$ 得 $a=\sin a$. 所以 $a=0$, 即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

(2) (本小题 6 分)

- 解法1:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}&=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}\\&=(洛)\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{2x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)}\\&=(代换)\lim_{x\to0}e^{\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}\\&=\lim_{x\to0}e^{\frac{-x\sin x}{6x^2}}=e^{-\frac{2}{6}}\end{aligned}$$

又由 (1), $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+2}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}\\&=(归并)\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x^2}{x^2}}\\&=e^{-\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

- 解法2:因为 $\left(\frac{\sin x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x^3}}$, 而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$, $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin-x}}=e$, 所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{2}{6}}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$. -->

五.

(1) 任给非零 $x \in (-1,1)$, 由 $Lagrange$ 中值定理得,

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x). \quad (0<\theta(x)<1)$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 连续且 $f''(x)=0$, 所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号. 不妨设 $f''(x)>0$, 则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调减, 故 $\theta(x)$ 唯一.

(2)

- 解法1： 由 (1) 及 Taylor 公式得, $f''(\theta(x)x)=f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$., 故 $\frac{f'(g(x)x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(\xi)$, 从而 $\theta(x)\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\frac{1}{2}f''(\xi)$。 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\theta(x)(x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$, $\lim\limits_{x\to 0}f''(\xi)=\lim\limits_{\xi\to 0}f''(\xi)=f''(0)$, 得 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)f''(0)=\dfrac{1}{2}f'''(0)$, 且 $f''(x)=0$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$
- 解法2： 对于非零 $x\in(-1,)1$, 由 $Lagrange$ 中值定理得： $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\cdot(0<\theta(x)<1)$ 即 $f(x)-f(0)-f'(0)x=xf'(\theta(x)x)-f'(0)x$ 故 $\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$ 而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=(洛)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)$ 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)f''(0)=\dfrac{1}{2}f''(0)$, 且 $f''(x)=0$ 故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$

2021 年高数上期中试题答案

一、选择题

1. D

当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+2\sin x)\sim 2\sin x\sim 2x$.

2. C

当 $x\to 0$ 时, $|f(x)|=\sqrt{|x|}\left|\sin\frac{1}{x^2}\right|\leqslant\sqrt{|x|}\to 0$, 则 f 在 $x=0$ 处连续.

3. A

因为 $f(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}\arctan\frac{1}{x}\to-\frac{\pi}{2},x\to 0^+$, 且 $f(x)=\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\frac{1}{x}\to-\frac{\pi}{2},x\to 0^-$. 那么 $x=0$ 是可去间断点.

4. B

F 在 $x=0$ 处可导, 即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

存在, 那么就有 $f(0)=0$.

5. C

因为

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}-1}=\frac{f(x)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{f(x)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2},$$

那么有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$$

首先有 $f(0)=0$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=0,$$

得到 $f'(0)=0$, 排除 A、 B 选项. 又因为 $\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}-1}\to 2, x\to 0$ 且 $\sqrt{1+x^2}-1\geqslant 0$, 那么 $f(x)\geqslant 0$, 即选项 C.

二、填空题

1.

解答. 答案: $y'=e^{f(-x)}\left[f'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-f(\sqrt{x})f'(-x)\right]$.

用函数相乘的求导和链式求导法则,

$$\begin{aligned}y'&=[f(\sqrt{x})]'e^{f(-x)}+f(\sqrt{x})\left(e^{f(-x)}\right)'\\&=f'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{f(-x)}+f(\sqrt{x})e^{f(-x)}f'(-x)\cdot(-1)\\&=e^{f(-x)}\left[f'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-f(\sqrt{x})f'(-x)\right].\end{aligned}$$

2.

解答. 答案: $\frac{1}{2}$.

考虑夹逼定理. 因为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+n}\leqslant\frac{i}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+1},$$

上式左边等于 $\frac{n+1}{2(n+2)}$, 右边等于 $\frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}$, 令 $n\to\infty$, 得到极限为 $\frac{1}{2}$.

3.

解答. 答案: -6 .

两边同时乘 x^2-1,

$$y\left(x^2-1\right)=x^4+x^2+x.$$

首先, 式 (1) 两边同时求三阶导,

$$y'''\left(x^2-1\right)+6y''x+6y'=24x,$$

令 $x=0$,

$$y'''(0)\underset{20}{=}6y'(0).$$

在式 (1) 两边同时求导, 得到

$$y'\left(x^2-1\right)+2yx=4x^3+2x+1,$$

将 $x=0$ 代入,

$$y'(0)=-1,$$

那么 $y'''(0)=-6$.

4.

解答. 答案: $-2e^{-2}$.

因为 $y'=-\frac{e^x}{2}\left(x^2+2x\right)$, 因为 $e^x>0$, 只需考虑函数 $g(x)=-x^2-2x$, g 有零点 $x_1=-2, x_2=0$, 结合 g 函数图像图 (1) 得到 y 的一个极小值为 $y(-2)=-2e^{-2}$.

图 1: $g(x)$ 的函数图像

5.

解答. 答案: $\mathrm{d}y=\frac{1-y}{x+e^y}\,\mathrm{d}x$.

因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'$, 对原方程两边求导,

$$y+xy'+e^yy'=1$$

将 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 代入化简得到,

$$\mathrm{d}y=\frac{1-y}{x+e^y}\,\mathrm{d}x$$

三、解答题

解答. (1) $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-4}{\frac{\sin\pi x}{\pi x}\pi}=-\frac{4}{\pi}$, $\lim_x\to0^+f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=0$, 故 $x=0$ 为跳跃间断点。

(2) $\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x\left(x^2-4\right)}{\sin\pi x}=\frac{8}{\pi}$, 故 $x=-2$ 为可去间断点。

(3) $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$, 故 $x=1$ 为可去间断点。

(4) $\lim_{x\to-k}f(x)=\infty, k=1,3,4,5\cdots$, 故 $x=-k, k=1,3,4,5\cdots$ 为无穷间断点。

四、计算题

1. 原式 $=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(\cos2x+2x\sin x)}{x^4}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x+2x\sin x)}{x^4}}$, 又由洛必达法则得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{\cos 2x+2x\sin 2x}}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x}\lim_{x\to0}\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-4\cos 2x+2\cos x+2\cos x-2x\sin x}{12x^2}=\lim_{x\to0}\frac{8\sin 2x-4\sin x-2\sin x-2x\cos x}{24x}=\frac{1}{3}$$
$\therefore e^{\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$ 。

2. 两边取对数得 $\ln y=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x\right)\right]$,

两边同时对 x 求导得 $\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{-2xe^{-x^2}-\sin\sqrt{5}\sin x}{2\left(e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x\right)}\right]$,

由此可得 $y'=\frac{1}{2}\sqrt{e^{\sin\frac{1}{x}}\sqrt{e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x}}\left[-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{-2xe^{-x^2}-\sin\sqrt{5}\sin x}{2\left(e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x\right)}\right]$ 。

3. $\frac{dy}{dt}=-3+\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt}=2+\frac{1}{1+t^2}$, 故 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dx}}=\frac{-3+\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1}{1+t^2}}$,

又由 $t=0$ 得 $k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-1$, 同时 $(x,y)|_{t=0}=(3,2)$,

故切线方程为 $y-2=-(x-3)$, 法线方程为 $y-2=x-3$ 。

4. $f'(x)=-x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(5-x)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5(2-x)}{3\sqrt[3]{x}}(x\neq0)$, 其中 $x=0$ 为不可导点,

故可得下表

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$f'<0$	$f'>0$	$f'<0$

因而 $x=0$ 时有极小值 $f(0)=0$, $x=2$ 时有极大值 $f(2)=3\sqrt[3]{4}$ 。

5. 由题目, y 对 x 分别求一阶和二阶导得 $y'=-(x-1)^2e^{-x}$, $y''=(x-1)(3-x)e^{-x}$ 。

因而拐点分别在 $x=1$ 和 $x=3$ 对应坐标处, 即凹区间为 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$, 凸区间为 $(1,3)$, 拐点为 $\left(1,\frac{2}{e}\right)$和 $\left(3,\frac{10}{e^3}\right)$ 。

6. $\lim_{x\to\sigma^-}f(x)=2,\lim_{x\to0^+}f(x)=a$, 由 $f(x)$ 连续知 $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)$, 即 $a=2$ 。 同时,
$\lim_{x\to\sigma^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}-2}{x}=2,\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$, 由 $f(x)$ 可导知
$\lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^+}f'(x)$, 即 $b=2$ 。

五、证明题

1. 由题可知 $x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n+1}>1$,

故 $\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{x_n+1}\left|x_n-\sqrt{2}\right|<\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right|<\cdots<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n\left|x_1-\sqrt{2}\right|<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n$,

从而有 $\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-\sqrt{2}\right)=0$, 进而有 $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\sqrt{2}$, 亦即 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$。

2. 考虑 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 分别在在 $x=0$ 处的泰勒展开,

有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f'(\xi_1)x^2$, 从而有 $f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$,

以及 $f'(x)=f'(0)+f''(\xi_2)x$, 从而有 $f'(x)=f''(\xi_2)x$。

又因为 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 上连续, 所以 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上有极大值。

我们不妨设 $x=\eta$ 时能取到 $M=\max_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\left(|f(x)|+|f'(x)|\right)=\left(|f(\eta)|+|f'(\eta)|\right)$

$=\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|\eta^2+|f''(\xi_2)||\eta|\leq M\left(\frac{1}{2}\eta^2+\eta\right)\leq\frac{5}{8}M$, 由此得 $M=0$。

综上所述, $\exists\delta\geq\frac{1}{2}$, s.t. $x\in(-\delta,\delta)$ 时, 有 $f(x)\equiv 0$。

2020 年高数上期中试题答案

一、填空题 $(4'\times 5=20')$

1. e^2
2. $\frac{3}{2}$
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{dx}{y^y(1+\ln y)}$
5. $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

解析.

1. 取 ln 对数有. $(1+2xe^x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+2xe^x\right)\right)$, 由 $\ln(1+x)\sim x$ 等价无穷小有.

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+2xe^x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(2xe^x)=\lim_{x\to 0}2e^x=2$, 故原式极限为 e^2

2. 由于 $\sum_{k=1}^n\frac{n+k}{n^2+n}<\sum_{k=1}^n\frac{n+k}{n^2+k}<\sum_{k=1}^n\frac{n+k}{n^2}$, 其中 $\sum_{k=1}^n(n+k)=n^2+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$,

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{n+k}{n^2+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}}{n^2+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}$

$=\frac{3}{2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{n+k}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{3}{2}$

由夹逼定理可得 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)=\frac{3}{2}$

3. $y'(x)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{x+e^{-\frac{x}{2}}}}$, 因此 $y'(0)=\frac{1}{3}$

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dy^y}=\frac{1}{y^y(1+\ln y)}$, 其中 $\frac{dy^y}{dy}=(y^y)'=\left(e^{y\ln y}\right)'=e^{y\ln y}(1+\ln y)=y^y(1+\ln y)$

所以 $dy=\frac{dx}{y^y(1+\ln y)}$

5. $y(x)=x+2\cos x$, 则 $y'(x)=1-2\sin x, y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0, x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 时 $y'(x)\geq 0, y(x)$ 单调递增, $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 时 $y'(x)\leq 0, y(x)$ 单调递减, 故 $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ 为函数 $y(x)=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值

二、计算题 $(8'\times 7=56')$

1. 由 $x\to 0$ 时 $\tan x\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2, \sin x\sim x$ 等价无穷小代换可得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan^2(3x)}{1-\cos(\sin x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(3x)^2}{1-\cos(\sin x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}x^2}\right)=18$$

因此 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan^2(3x)}{1-\cos(\sin x)}\right)=18$ (注. 卷印刷有误, 应为 $x\to 0$ 而不是 $x\to\infty$)

2. 对 $y(x)$ 求导. $y(x)=e^{\sin\frac{1}{x}}\tan\left(\frac{1}{x}\right), y'(x)=\tan\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}e^{\sin\frac{1}{x}}\right)+e^{\sin\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$

$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\left(\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$, 将 $\frac{4}{\pi}$ 代入得到 $y'\left(\frac{4}{\pi}\right)=-\frac{\pi^2}{16}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. $t=0, x=f(0)-1=1, y=f(0)=2$, 因此曲线经过点 $(1,2)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2e^{2t}f'\left(e^{2t}-1\right)}{f'(t)}, t=0, \frac{dy}{dx}=\frac{2f'(0)}{f'(0)}=2$, 故切线的斜率为 2

所以切线的方程是 $y=2x$

4. $F(x)=\lim_{t\to\infty}t^2\left[f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]\sin\frac{x}{t}=\lim_{t\to\infty}\left(t\sin\frac{x}{t}\right)\left\{t\left[f\left(x+\frac{\pi}{t}-f(x)\right]\right\}$,

其中

$$\lim_{t\to\infty}t\sin\frac{x}{t}=x\lim_{t\to\infty}\left[\frac{t}{x}\sin\frac{x}{t}\right]=x\lim_{t\to\infty}t\left[f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]$$

$$=\pi\lim_{t\to\infty}\frac{\left[f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]}{\frac{\pi}{t}}=\pi f'(x)$$

所以 $F(x)=\pi x f'(x)$, 进一步求导得到 $F'(x)=\pi\left(f'(x)+xf''(x)\right)$

5. $a>0$, 因为 $\frac{\alpha(x)}{x^3}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+x^3}}{x^3}=\frac{-x^3}{x^3\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+x^3}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x^3}}$

由于 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha(x)}{x^3}=-\frac{1}{2\sqrt{a}}$ 是一个非 0 实数, 故此时为 x 的 3 阶无穷小

$a=0, \alpha(x)=-x\sqrt{x}, \frac{\alpha(x)}{x\sqrt{x}}=-1$, 此时为 x 的 $\frac{3}{2}$ 阶无穷小

因此 $a>0$ 时, $\alpha(x)$ 是 x 的 3 阶无穷小, $a=0$ 时, $\alpha(x)$ 是 x 的 $\frac{3}{2}$ 阶无穷小

6. 在 $x=0$ 处由定义求导可得 $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0\ x\neq0$ 时, 对 $f(x)$ 直接求导有 $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$

   因为 $\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^3}{e^{t^2}}=0=f'(0)$

   所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

7. $y(x)=x^4(12\ln x-7), y'(x)=16x^3(3\ln x-1), y''(x)=144x^2\ln x$

   因为 $y''(1)=0, y(1)=-7$, 而 $x\in(0,1), y''(x)<0, x\in(1,+\infty), y''(x)>0$

   所以曲线的上凹区间是 $(1,+\infty)$, 上凸区间是 $(0,1)$, 拐点是 $(1,-7)$

三、解答题

$\lim_{x\to-1}f(x)$ 不存在, $x=-1$ 为第一类间断点

$\lim_{x\to0^-}f(x)=-\sin1, \lim_{x\to0^+}f(x)=-1, x=0$ 为第一类间断点

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{2\pi}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi}, x=1$ 为可去间断点

$\lim_{x\to2k+1}f(x)=\infty, k\in\mathbb{N}, x=2k+1$ 为第二类间断点

连续区间为 R 中除去上述间断点的所有点

四、证明题

1. 不妨设 $x_1<x_2, \because \frac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}=f'(\xi_1), x_2<\xi_1<x_1+x_2$

$\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}=f'(\xi_2), 0<\xi_2<x_1\ (4')\ \because \xi_2<\xi_1\ \therefore f'(\xi_2)>f'(\xi_1)\ (\because f''<0)$

故 $\frac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}<\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}$ 即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

$x_2<x_1$ 可以类似证明.

2. $f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{f''(\xi)}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$

$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^2}+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\quad f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$

两式相减得 $1=\frac{1}{48}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]\ (5'')$ 取 $f'''(\xi)=\max\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\}$

则 $f'''(\xi)\geq24$

2019 年高数上期中试题答案

一、选择题

1. D

令 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $\left(\frac{1}{x_n}\right)^2\sin\frac{1}{x_n}=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2=+\infty,(n\to+\infty)$, 可见 $\left(\frac{1}{x}\right)^2\sin\frac{1}{x}$ 无界

令 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $\left(\frac{1}{x_n}\right)^2\sin\frac{1}{x_n}=0$, 可见 $\left(\frac{1}{x}\right)^2\sin\frac{1}{x}$ 并非无穷大。选

2. C

$\lim_{x\to0^+}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=0$, 故 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$, 函数在 $x=0$ 处连续

$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\sqrt{\Delta x}}$, 极限不存在 (证明方法与选择题第一题类似), 故函数在 $x=0$ 不可导

3. A

解: $f(x)$ 为奇函数, 由对称性知, $x>0$ 时, $f(x)$ 单调递增

4. D

令 $f(x)=-|x|,g(x)=-x^2,F(x)$ 在 $x=0$ 处不能取得极大值。令 $f(x)=-|x|,g(x)=\cos x,F(x)$ 在 $x=0$ 有极大值。故不能确定 $F(x)$ 能否在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 极大值点取得极大值, 选 D

5. D

对于 A 选项, $\lim_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim_{h\to+\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)}{\frac{1}{h}}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 由题意知该极限存在, 但是 $\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 不一定存在, 所以 $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 不一定存在, 即 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数不一定存在。对于 B、C 选项, 若 $x=a$ 为函数的跳跃间断点, 选项中的极限存在, 导数不存在。

二、填空题

1. $[1,e]$

$f(x)$ 的定义域为 $x\in[0,1]$, 对于函数 $f(\ln x),\ln x\in[0,1],x\in[1,e]$

2. $\ln3$

原式

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{x-a+a}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{2a}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^a=e^{2a}=9$,

$a=\ln3$

1. e^2,e^2-1

$\lim_{x\to0^-}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^2,\lim_{x\to0^+}a^{\frac{\sin x}{x}}=a$ 由于 $f(x)$ 连续, $e^2=b+1=a$ 解得 $a=e^x\ b=e^2-1$

1. 0,1

易得, $f(x)$ 的间断点包括 $x=0$ 和 $x=1$。对于 $x=0,\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{1-x}}=e$

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{1-x}}=-e$, 左右极限均存在, 为第一类间断点。对于

$x=1,\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{1-x}}=+\infty$, 极限不存在, $x=1$ 为第二类间断点

1. 1

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{x}=a=1$

三、计算题

1. 解: 原式 $=\frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2}{\cos x}=0$

2. 解: $y'=\left[\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]\cdot\frac{-1-(1-\ln x)}{x^2}=\frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$

3. 解: $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2}{e^t(\sin t+\cos t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6te^t(\sin t+\cos t)-\left(3t^2+2\right)e^t\cdot 2\cos t}{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2}\cdot\frac{1}{e^t(\sin t+\cos t)}$$

4. 解: 对方程两边求导, 得: $[\cos(xy)]\left(y+xy'\right)-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y}\cdot y'=0$

注意到 $\mathrm{x}=0$ 时 $\mathrm{y}=0$, 故 $y'(0)=e(1-e)$

切线: $y-e=e(1-e)x$

法线: $y-e=\frac{1}{e(e-1)}x$

5. $\because \frac{n^2+1+2+\ldots+n}{n^2+n}\leq$ 原式 $\leq\frac{n^2+1+2+\ldots+n}{n^2+1}=\frac{n^2+\frac{1}{2}\mathrm{n}(n+1)}{n^2+1}\to\frac{3}{2}(n\to+\infty)$
$\therefore\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\ldots\frac{n+n}{n^2+n}\right)=\frac{3}{2}$

四、解答题

解: (1) 当 $n=1$ 时, $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=o=f(o)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 极限不存在, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

(2) 当 $n=2$ 时, $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0,\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导

当 $x\neq 0$ 时, $\lim_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$, 故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

(3) 当 $n>2$ 时, $\lim_{x\to 0}f(x)=0,\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 极限存在, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导
$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x})=0=f'(0)$, 故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

五、证明题

1. $$\because x_{n+1}-x_n=\sqrt{1-x_{n-1}}-\sqrt{1-x_n}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{1-x_{n-1}}-\sqrt{1-x_n}}$$
$$\therefore|x_{n+1}-x_n|\leq\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\leq\ldots\leq\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$$
$$\therefore\forall p\in N_+,|x_{n+p}-x_n|\leq|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$
$$|x_{n+p}-x_n|\leq\left(\frac{1}{2^{n+p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)|x_2-x_1|$$

由柯西收敛原理知, 原数列收敛, 设 $\lim_{x\to\infty}x_n=\alpha$, 等式两边取极值知 $\alpha=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

2. 当 $x>e$, 令 $f(x)=x\ln x$, 则 $f'(x)=1+\ln x>0$

$\therefore$ 当 $e<x_1<x_2,x_1\ln x_1<x_2\ln x_2$, 即 $\frac{\ln x_1}{\ln x_2}<\frac{x_2}{x_1}(e<x_1<x_2)$

一、选择题

1. C

解析: $\lim_{x\to 2^+}\arctan\dfrac{1}{2-x}=-\dfrac{\pi}{2}\quad\lim_{x\to 2^-}\arctan\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{\pi}{2}$

2. D

解析: $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=0\quad\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x^2g(x)=0\quad f(0)=0$

$\therefore$ 连续

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=0\qquad\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}xg(x)=0$$

$\therefore$ 可导

3. C

解析: $x^2-x-2=0\Rightarrow|x^2-x|=0\Rightarrow x=0$ 或 1

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x-x^2\right)}{x}=-2$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x\right)}{x}=2\quad\therefore x=0\text{ 不可导}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x\right)}{x-1}=-2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x-x^2\right)}{x-1}=2\quad\therefore x=1\text{ 不可导}$$

4. B

解析: $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}/(x-a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$

$=f''(a)=-1<0\ f'(a)=0\quad\therefore$ 取极大值

5. B

解析: $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{x}=f'(1)=-2=f'(5)$

6. A

二、解答题

1. 原式 $=\lim_{x\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^x}}=\lim_{x\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^x}}=2$

2. $\mathrm{d}y=\left(\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\arctan x\mathrm{d}x$

3. 原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cot x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$

4. $y'e^y+6\left(y+xy'\right)+2x=0\quad y'=\dfrac{-2x-6y}{6x+e^y}$

又 $y(0)=0\quad\therefore y'(0)=0$

彭康学导因

5. $\dot{x}=3t^2+9 \quad \dot{y}=2t-2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{2t-2}{3t^2+9} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{2t-2}{3t^2+9}\right)'/\dot{x}=\frac{-2t^2+4t+6}{9(t^2+3)^3}$$

6. 设 $f(x)=e^x-1-xe^x$ $f'(x)=-xe^x<0 \quad \therefore f(x)$ 单调减

又 $f(0)=0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时 $f(x)<0 \quad$ 即 $e^x-1-xe^x<0\Rightarrow e^x-1<xe^x$

7. $f'(x)=1-2\sin x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6} \quad f(x)$ 先增后减, 在 $\frac{\pi}{6}$ 处取最大值, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

[注: 也可以算出端点值进行比较]

三、解答题

1.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\sin ax=0$$
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}e^{2x}+b=b+1 \quad \therefore b+1=0\Rightarrow b=-1$$
$$f(0)=0 \quad \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{x}=a \quad \lim_{x\to\sigma}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to\sigma}\frac{e^{2x}-1}{x}=2$$
$$\therefore a=2 \quad f'(0)=2$$
当 $x>0$ 时, $f'(x)=2\cos 2x$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=2e^{2x}$
$$\therefore f(x)=\begin{cases}2\cos 2x & x>0\\ 2e^{2x} & x\le 0\end{cases}$$

2. (1) 定义域: $\{x\mid x\neq -1\}$

$$f'(x)=\frac{4x(x+1)}{4(x+1)^4}=\frac{x}{(x+1)^3}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow x=0$$

当 $x<-1$ 时, $f'(x)>0$; 当 $-1<x<0$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$

$\therefore$ 增区间: $(-\infty,-1),(0,+\infty)$

减区间: $(-1,0)$ 极小值: $f(0)=0$

无极大值

(2) $f''(x)=\frac{1-2x}{(x+1)^4}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ 凹区间: $(-\infty,-1),\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 凸区间: $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 拐点: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{18}\right)$

$\lim_{x\to-1}=\frac{x^2}{2(x+1)^2}=+\infty \quad \lim_{x\to\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x+1)^2}=0$

$$\lim_{x\to\infty}=f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ 渐近线: $x=-1$ (垂直渐近线); $y=\frac{1}{2}$ (水平渐近线)

四、证明题

1. 证明: $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3=\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3$

$$\begin{cases} f(1)=\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{6} & \xi_1\in(0,1) \\ f(-1)=\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\xi_2)}{6} & \xi_2\in(-1,0) \end{cases}$$

两式相减: $f(1)-f(-1)=\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]=1$

$$令\ f'''(\eta)=\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\},则\ f'''(\eta)>\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3\quad \eta\in(-1,1)$$

2. $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

$\therefore \exists\eta$ 使得 $f(\eta)=\frac{1}{2}$

由拉格朗日中值定理: $\begin{cases} \frac{f(\eta)-f(0)}{\eta}=f'(x_1) & x_1\in(0,\eta) \\ \frac{f(1)-f(\eta)}{1-\eta}=f'(x_2) & x_2\in(\eta,1) \end{cases}\Rightarrow \frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$

2017 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. e^2

解析: $\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x^2)}/=\lim_{x\to0}e^{\frac{2\pi x^x}{x}}=\lim_{x\to0}e^{2e^x}=e^2$

2. 3

解析: $\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{1+2^n+3^n}<\sqrt[n]{3^n+3^n+3^n}\because\lim_{x\to0}\sqrt{n}^n=3,\lim_{x\to0}\sqrt{n}^{3\cdot3^n}=3$ 由夹逼准则知原极限为 3

3. $\frac{1}{3}$

解析: $y'=\frac{2}{3}\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{3}$

4. $0:1$

解析: $\lim_{x\to0^+}f(x)=b\qquad\lim_{x\to0}f(x)=1\quad\therefore b=1$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-x^2-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}-1}{x}=a\quad\therefore a=0$$

5. $-1;3$

解析: $y''=6ax+2b=0\Rightarrow x=-\frac{b}{3a}=1\quad$ 且 $2=a+b\quad\therefore a=-1,b=3$

二、选择题

1. D

解析: $\ln(1+2\sin x)-2\sin x-2x$

2. C

解析: $\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}=0$ (因为 $\sin\dfrac{1}{x^2}$ 有界) $\therefore$ 连续

3. D

解析:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}/x=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=1>0\quad f(0)=0\quad f'(0)=0\quad\therefore x=0\text{ 处取极小值}$$

4. C

解析: 根据"奇过偶不过"画草图:

容易看出 $x=3$ 为拐点

证明: 令 $g(x)=(x-1)(x-2)^2(x-4)^4$, 则 $y=(x-3)^3g(x)$ $y'=3(x-3)^2g(x)+(x-3)^3g'(x)$

$y''=6(x-3)g(x)+6(x-3)^2g'(x)+(x-3)^3g''(x)$

$y''(3)=0$

$y''=6g(x)+18(x-3)g'(x)+9(x-3)^2g''(x)+(x-3)^3g'''(x)\quad y''(3)=6g(3)=2\quad$ 故 $x=3$ 为拐点

[注: 该点的二阶导数为 0 , 三阶导数不为 0 , 是该点为拐点的充分条件。对于幂函数的 n 重根, 若 $n\geq 3$ 且为奇数, 则此 n 重根为函数的拐点。]

三、解答题

1. 原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x\tan x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x+\sin x}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+\cos x-x\sin x}{4}=\frac{3}{4}$$

2. $$y'=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{1+x^2-1}-\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

3. 原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)-2x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\cos xe^x-2}{1}=0$

4. $$\ln y^x=\ln e^{x+y}\Rightarrow x\ln y=x+y\Rightarrow\ln y+\frac{x}{y}y'=1+y'\Rightarrow dy=\frac{y(\ln y-1)}{y-x}dx$$

5. $$\dot{x}=2t,\quad \dot{y}=-\sin t\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-\frac{1}{2}\frac{\sin t}{t}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{1}{2}\frac{\sin t}{t}\right)'/\dot{x}=-\frac{1}{4}\frac{t\cos t-\sin t}{t^3}=\frac{2}{\pi^3}$$

6. $$y'=4x^3(12\ln x-7)+x^4\cdot\frac{12}{x}=16x^3(3\ln x-1)$$

$$y''=16\left[3x^2(3\ln x-1)+x^3\cdot\frac{3}{x}\right]=144x^2\ln x=0\Rightarrow x=1$$

$\therefore$ 凹区间 $(1,+\infty)$ 凸区间 $(0,1)$ 拐点 $(1,-7)$

7. $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{x(1+x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=0$ $\therefore x=0$

为跳跃间断点 $\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}$ 不存在

$\therefore x=2$ 为振荡间断点

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x(1+x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{2x+1}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=-\frac{2}{\pi}$$

$\therefore x=-1$ 为可去间断点

$$\lim_{x\to1-2k} f(x)=\lim_{x\to1-2k}\frac{x(1+x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\infty$$

$\therefore x=1-2k(k=2,3,4\ldots)$ 为无穷间断点

连续区间为 R 除去上述间断点

8. (1) $f(-1)=-f(1)=-1$ 令 $F(x)=f(x)-x$ $F(0)=0$

$F(1)=0$

由罗尔定理: $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)-1=0\Rightarrow f'(\xi)=1$

[注: 由拉格朗日中值定理: $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(\xi)=1$, 但 $\xi\in(-1,1)$ 不在题中要求范围]

(2) 由 (1) 知 $f'(\xi)=1$, 由奇函数性质知, $f'(-\xi)=1$ 令 $G(x)=e^x[f'(x)-1]$

$F(\xi)=F(-\xi)=0$ 由罗尔定理: $\exists\eta\in(-\xi,\xi)$ 使 $G'(\eta)=0$

即 $e^\eta[f''(\eta)+f'(\eta)-1]=0\Rightarrow f''(\eta)+f'(\eta)=1$

[注: 解此类题的技巧在于辅助函数的构建]

2016 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $a=1$

解析: $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}$

$=\lim_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\dfrac{\cos x}{x+2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{2\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2}$

2. $a = -2$

解析: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos 2x + 2ae^{2ax}}{1} = 2 + 2a$

$\therefore 2 + 2a = a \quad a = -2$

3. $(-10, 54)$

解析: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \dfrac{2\left(3t^2+9\right) - 6t(2t-2)}{\left(3t^2+9\right)^3} \geq 0$ 解得: $1 \leq t \leq 3$

又 $x = t^3 + 9t$ 单调增 $\therefore -10 < x < 54$ (山凸区间一般不考虑端点)

4. 1

解析: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{x\ln x} = \lim_{x\to 1} \dfrac{e^{x\ln x} - 1}{x\ln x} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(\ln x + 1)e^{\ln x}}{\ln x + 1} = \lim_{x\to 1} e^{x\ln x} = 1$

5. $y = x + \dfrac{1}{e}$

解析: 设渐近线为 $y = kx + b$, 则 $k = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)}{x} = 1$

$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right) - x\right]$

$= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1 + \dfrac{1}{ex}\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{e}\ln\left(1 + \dfrac{1}{ex}\right)^{ex} = \dfrac{1}{e}$

二、选择题

1. D

解析: 设 $\varphi(x)$ 在 x_0 处间断, 则 $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_1}\varphi(x)}{f(x_0)} \neq \dfrac{\varphi(x_0)}{f(x_0)}$.

A 反例: 若 $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \mathrm{x} \neq 0 \\ 0, \mathrm{x} = 0 \end{cases}$, $f(x) = 1$, 则 $\varphi[f(x)] = \varphi(1) = 1$ 无间断点

B 反例: 若 $\varphi(x) = \begin{cases} x + 1, \mathrm{x} \geq 0 \\ x - 1, \mathrm{x} < 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x\to 0}[\varphi(x)]^2 = 1 = [\varphi(0)]^2$ 无间断点.

C 反例: 若 $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \mathrm{x} \neq 0 \\ 0, \mathrm{x} = 0 \end{cases}$, $f(x) = 1$, 则 $f[\varphi(x)] = 1$ 无间断点.

2. D

解析: $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(1) - f(1-x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-f'(1-x)\cdot(-1)}{2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{f'(1-x)}{2} = \dfrac{f'(1)}{2} = -1$

$\therefore f'(1) = -2$

3. B

解析: 同 2018 年选择题第 4 题

4. D

解析: $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0\quad \lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} x^2g(x)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}xg(x)=0\quad \therefore f(x)\text{ 在 }x=0\text{ 处可导}$$

5. C

解析: 对 A、B, 若 $f(x)=1$, 则 $f''(x_0)=f'(x_0)=0$ 故 A、B 错误

对 D, $f(x)$ 的最大值可在端点处 $x=a$ 或 $x=b$ 取到.

三、计算题

1. $-\dfrac{1}{6}$

解析: $\lim_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{\frac{6x^2}{1+2x^3}}=\lim_{x\to0}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1+2x^3}{1+x^2}=-\dfrac{1}{6}$

2. $2dx$

解析: $dy=\left[\dfrac{2}{\cos^2 2x}+2^{\sin x}(\ln 2)\cos x\right]dx\quad \therefore dy\Big|_{x-\frac{\pi}{2}}=(2+0)dx=2dx$

3. -2

解析: $\because e^y+6xy+x^2-1=0\quad \therefore y(0)=0$

$\because y'e^y+6(y+xy')+2x=0\quad \therefore y'(0)=0$

$\because y'^2e^y+y''e^y+6(y'+y'+xy'')+2=0$

4. $x=0$ 为跳跃间断点: $x=-1$ 为可去间断点:

$x=-(2k+1),\mathrm{k}=1,2,\cdots$ 为无穷间断点: $x=2$ 为震荡间断点.

解析: $f(0)=-\sin\dfrac{1}{4}\quad \lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{x(x+1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}=0\neq f(0)\lim_{x\to0^+} f(x)$

$=\lim_{x\to0^+}\sin\dfrac{1}{x^2-4}=f(0)$

$\therefore x=0$ 处不连续, 为跳跃间断点

$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$ $\therefore x=-1$ 为可去间断点

当 $\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$ 时, $\lim_{x\to 2k+1} f(x)=\infty$ $\therefore x=-(2k+1), \mathrm{k}=1,2,\cdots$ 为无穷间断点

当 $x=2$ 时, $x^2-4=0$, 此时 $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\sin\dfrac{1}{x^2-4}$ 不存在 $\therefore x=2$ 为振荡间断点

5. (1) $x\neq 0$ 时 $f'(x)=\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}$

$x\neq 0$ 时 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}-0}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+e^{-x}}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{g''(0)-1}{2}$

(2) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}, x\neq 0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, x=0\end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-g(x)+e^{-x}}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})+x\left(g''(x)-e^{-x}\right)-g'(x)-e^{-x}}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\dfrac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$ $\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 即在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

6. 同 2018 年解答题第 9 题

7. 同 2018 年解答题第 10 题

8. 设 $F(x)=e^{-x}f(x)$, 则存在 η 使 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)$

即 $\dfrac{e^{-b}f(b)-e^{-a}f(a)}{b-a}=e^{-\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]$ $\therefore e^{-\eta\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]=\dfrac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}$

设 $G(x)=e^{-x}$, 则存在 ξ 使 $\dfrac{G(b)-G(a)}{b-a}=G'(\xi)$ 即 $\dfrac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}=-e^{-\xi}$

$\therefore e^{-\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]=-e^{-\xi}$ $e^{\xi-\eta}\left[f(\eta)-f'(\eta)\right]=1$

2015 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $a=b$

解析: $f(0)=a\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{bx}{x}=b$ $\therefore a=b$

1. 1

解析: 原式

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(1+\tan x)}-1}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+\tan x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+\tan x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

2. $y = x - 1$

解析: 设 $y = kx + b \quad k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+1}{x+1} = -1$$

3. $(-\infty, 2]$

解析: $y'' = (x-2)e^{-x} \le 0 \quad \therefore x \le 2$

4. e

解析: $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - a}{x(x-1)}$ 极限存在 $\quad \therefore a = e;$

二、选择题

1. B

同 2016 年选择题第 1 题

2. A

同 2016 年选择题第 2 题

3. C

解析: 不妨取 $n = 3, f''(x) = 2f(x)\cdot f'(x) = 2f^3(x) \quad f'''(x) = 6f^2(x)\cdot f'(x) = 6f^4(x)$

归纳法知: $f^n(x) = 6f^2(x)\cdot f'(x) = n![f(x)]^{n+1}$

4. B

解析: $f(x) = (x-2)(x+1)|x(x-1)(x+1)|$ 草图: 由图知不可导点为 $x = 0$ 和 $x = 1$

5. D

解析: 同 2016 年选择题第 3 题

三、计算题

1. $e^{\frac{1}{6}}$

解析: $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}$ 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{1}{t}$ 原式

$$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin t}{t}} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln\sin t - \ln t}{r^2}}$$

彭康学导因

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln\sin t-\ln t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{1}{t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^2\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{-t\sin t}{6t^2}=-\frac{1}{6}$$

2. $-3\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\quad(x>1\text{ 或 }x<-1)$

解析: $y'=3\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-3\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\quad(x>1\text{ 或 }x<-1)$

3. $y=\frac{e}{2}(x-3)+1$

解析: $t=0$ 时 $x=3,y=1\ \dot{x}|_{\mathrm{r}=0}=6t+2=2$

$\dot{y}e^y\sin t+e^y\cos t-\dot{y}=0$

$\dot{y}|_{t=0}=e$

$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{e}{2}$

切线方程为 $y=\frac{e}{2}(x-3)+1$

4. $\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}$

解析:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}\quad\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}\quad y'x-y=x+yy'\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x-y}$$

$$y'+y''x-y'=1+y'^2+yy''\Rightarrow y''=\frac{y'^2+1}{x-y}=\frac{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2+1}{x-y}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}$$

5. (1) $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, 定义域 $(-\infty,0]$

(2) $-\frac{1}{4\sqrt{\ln 2}}$

解析: (1) $f[\varphi(x)]=e^{\rho^2(x)}=1-x\quad$ 又 $\varphi(x)\geq 0\quad\therefore\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}\quad$ 定义域 $(-\infty,0]$

(2) $\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln(1-x)}}\cdot\frac{-1}{1-x}\quad\therefore\varphi'(-1)=-\frac{1}{4\sqrt{\ln 2}}$

6. $\left(2-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\pi$

解析: $\begin{cases}2\pi r=R\theta\\ h=\sqrt{R^2-r^2}\end{cases}\quad V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}\left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2-\left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}\left(2\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2}+\frac{-2\theta\cdot\theta^2}{2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right)=0\quad\theta=0$$

或 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\quad\therefore\varphi=2\pi-\theta=\left(2-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\pi$ 时容积最大

7. (1) 假设存在 x_0, 使 $g(x_0)=0,(a<x_0<b)$, 则 $g(a)=g(x_0)=g(b)=0$

由罗尔定理知: 存在 x_1,x_2 使 $g'(x_1)=g'(x_2)=0,(a<x_1<x_0,x_0<x_2<b)$

$\therefore$ 存在 x_3, 使 $g''(x_3)=0,(x_1<x_3<x_2)$ 与 $g''(x)\neq0$ 矛盾

$\therefore$ 假设不成立 故在 (a,b) 内 $g(x)\neq0$.

(2) 令 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$, 则 $F(a)=F(b)=0$

由罗尔定理知: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即 $f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

又 $g(x)\neq0,g''(x)\neq0\quad\therefore\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

8. $\because f''(x)<0\quad\therefore x>0$ 时 $f'(x)$ 为减函数 又 $f'(a)<0\therefore f'(x)<0\therefore f(x)$ 在 $(a+\infty)$ 上单调递减

当 $x_0=a+\frac{f(a)}{|f'(a)|}$ 时, 存在 $a<x_1<x_0$ 使 $f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$ 又 $f'(x)$ 为减函数

$\therefore f'(x_1)<f'(a)$

即 $\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}<f'(a)\quad\frac{f(x_0)-f(a)}{\frac{f(a)}{|f'(a)|}}<f'(a)\quad f(x_0)-f(a)<f'(a)\cdot\frac{f(a)}{|f'(a)|}$

$f(x_0)-f(a)<f'(a)\cdot\frac{f(a)}{-f'(a)}\quad\therefore f(x_0)<0$ 又 $f(a)>0$, 故在 (a,x) 中必有一实根

2014 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $\frac{5}{2}$

解析: 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2\frac{1}{2}^{2^2}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2^n}+\frac{\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)}{n+\sqrt{n^2-n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2^{1-\frac{1}{2^n}}+\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^*}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{5}{2}$$

2. 0 或 1

解析: $x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=1$

3. $-2014!$

解析: $y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\quad\because\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

$$\therefore\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(e)}=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}\quad\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right]\quad\therefore y^{(2014)}(0)=\frac{1}{2}\left[\frac{2014!}{-1}-\frac{2014!}{1}\right]=-2014!$$

4. $\dfrac{\pi}{2}dx$

解析: 令 $z=2x-1$, 则 $\begin{cases}y=f(z)\\z=2x-1\end{cases}$

$x=0$ 时 $z=-1$

$$dy\big|_{x=0}=\arctan z^2dz\big|_{z-1}=\frac{\pi}{4}dz=\frac{\pi}{4}d(2x-1)=\frac{\pi}{2}dx$$

二、选择题

1. D

解析: 例如: 若 $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{2},b_n=\dfrac{1}{n\sin\dfrac{\pi}{2}}$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n,\lim_{n\to\infty}b_n$ 均不存在, 但

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

2. C

解析: 若取 $x=\dfrac{1}{n\pi}$, 则 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{n\to\infty}n\pi\sin n\pi=0$

若取 $x=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ 则 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\infty\quad\therefore f(x)$ 无界但不是无穷大

3. C

解析: $\ln\left(\cos x+2x^2-1+1\right)\sim\cos x+2x^2-1\sim kx^2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x+2x^2-1}{kx^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+4x}{2kx}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x+4}{2kx}=\frac{3}{2k}$$

4. B

解析: $f'(0)=\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}>0\quad\therefore$ 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$

5. A

解析: 若 $f''(x)+[f'(x)]^3=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, 则 $f''(0)+[f'(0)]^3=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore f''(0)=\frac{1}{2}>0 \quad \text{又 } f'(0)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 为极小值点}$$

三、判断题

1. X

解析: 例如: $y=\dfrac{1}{x}, a=0, b=1$ 时, 在 $[\delta, 1-\delta]$ 上一致连续, 而在 $(0,1)$ 上不一致连续.

2. $\surd$

解析: 设 $x\in[x_1,x_2]$, 由凸函数定义可知: $f(x)\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 其中 $\lambda=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$

带入上式: $(x_2-x_1)f(x)\le (x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)$ 化简得: $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\ge\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

令 $x_1=a, x_2=a+\Delta x$, 则 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}$

当 $\Delta x\to 0$ 时: $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<f'(a) \quad \therefore f(x)\ge (x-a)f'(a)+f(a)$

四、计算题

1. $\dfrac{1}{L}$

解析: 由数学归纳法, 假设 $x_k=\dfrac{2^{2^{k-1}}-1}{2^{2^{2-1}}L}$, 带入 $x_{n+1}=x_n(2-Lx_n)$, 得 $x_{k+1}=\dfrac{2^{2^k}-1}{2^{2^k}L}$

$$\text{又 } x_1=\frac{1}{2L} \text{ 成立} \quad \therefore x_n=\frac{2^{2^{2-1}}-1}{2^{2^{n-1}}L} \quad \text{故} \lim_{x_n\to\infty}x_n=\lim_{x_n\to\infty}\frac{1}{L}-\frac{1}{2^{2^{2-1}}L}=\frac{1}{L}$$

2. $2:5$

解析: $e^{xy}+\sin x-y=0$ 当 $x=0$ 时, $y=1 \quad (y+xy')e^{xy}+\cos x-y'=0$

当 $x=0$ 时, $y'=2$ $(y'+y'+xy')e^{xy}+(y+xy')^2e^{xy}-\sin x-y''=0$

当 $x=0$ 时, $y^*=5$

3. $a=-\dfrac{4}{3}, b=\dfrac{1}{3}$

解析: $\begin{cases}\lim_{x\to 0}1+a\cos 2x+b\cos 4x=1+a+b=0\\ \lim_{x\to 0}(1+a\cos 2x+b\cos 4x)^n=-4a-16b=0\end{cases} \quad \therefore a=-\dfrac{4}{3}, b=\dfrac{1}{3}$

五、证明题

1. 证明: 令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \quad f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ 令 $g(x)=x\cos x-\sin x$

则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$

$\therefore g(x)$ 单调递减 又 $g(0)=0$

$\therefore g(x)<0$ 即 $f'(x)<0$ $\therefore f(x)$ 单调递减

又 $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\frac{2}{\pi}$ $\therefore \frac{2}{\pi}<f(x)<1$

即 $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$

2. (1) 令 $F(x)=f(x)-x$ $\because F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$ $F(1)=f(1)-1=-1<0$

又 $F\left(\frac{1}{2}\right)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导 $\therefore \exists \xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\xi$

(2) 令 $G'(x)=[f'(x)-\lambda f(x)+\lambda x-1]e^{-\lambda x}$ 则 $G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$

又 $G(0)=f(0)=0$ $G(\xi)=e^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]=0$

由罗尔定理知: $\exists\eta\in(0,\xi)$, 使 $G'(x)=0$ 即 $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$

3. (使用闭区间套定理或 weierstrass 定理证明)

反证法: 假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有无穷多个零点, 对 $[0,1]$ 进行二分, 则在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 中至少有一个区 间内有无穷多个零点。对有无穷多个零点的区间在进行二分, 不断二分后总有一个区间内有无穷多个 等点。当区间长度小于 Δx 时, 取区间内任意两零点 $x_0, x_0+\Delta x'$, 且 $|\Delta x'|<|\Delta x_0|$, 则 $f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x')-f(x_0)}{\Delta x'}=0$, 与 $f'(x_0)\neq 0$ 矛盾。

故假设不成立, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个零点。

2013 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $\ln 3$

解析: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2a}{x-a}x}=e^{2a}=9$ $a=\frac{\ln 9}{2}=\ln 3$

2. $e^{-2}:e^{-2}-1$

解析: $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}\ln(1-2x)}$

$=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}(-2x)}=e^{-2}, \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin ax}{x}=a$

$\therefore \begin{cases}a=b+1\\ e^{-2}=b+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=e^{-2}\\ b=e^{-2}-1\end{cases}$

3. $0;1$

解析: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{-x}=-e \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{-x}=e$

$\therefore x=0$ 为跳跃间断点

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}}\sin 1=0 \quad \lim_{x\to 1^1} f(x)=\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{1-x}}\sin 1=\infty$

$\therefore x=1$ 为无穷大间断点

4. $\boxed{1}$

解析: $\ln(1+ax)\sim ax, \sin x\sim x \quad \therefore a=1$

5. $\boxed{\dfrac{\cos+x}{x\cos x\ln a}dx}$

解析: $y'=\dfrac{\sec x+\tan x+x\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}{x(\sec x+\tan x)\ln a}=\dfrac{\cos x+\sin x\cos x+x\sin x+x}{x(\cos x+\sin x\cos x)\ln a}=\dfrac{\cos x+x}{x\cos x\ln a}$

6. $\boxed{2}$

解析: 原式 $=\lim_{n\to 0}\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\dfrac{1}{n}}=2$

7. $\boxed{\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}}$

解析: $y'=1-2\sin x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6} \quad y^*=-2\cos x<0 \quad \therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 为极大值点 故

$y_{\max}=y\big|_{x-\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\pi}{6}+2\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

二、计算题

1. $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

解析: 原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^4}{x^4}=\dfrac{1}{2}$

2. $\boxed{2\ \mathrm{A}}$

解析: $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x \quad \lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}\lim_{x\to 0} f(x)=\mathrm{A}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=2\ \mathrm{A}$

3. $\boxed{\text{定义法: } x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}>1 \quad |x_n-\sqrt{2}|=\left|\dfrac{x_{n-1}+2}{x_{n-1}+1}-\sqrt{2}\right|=\left|1-\sqrt{2}+\dfrac{1}{x_{n-1}+1}\right|}$

$$\left|\frac{(1-\sqrt{2})x_{n-1}+2-\sqrt{2}}{x_{n-1}+1}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{x_{n-1}+1}\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|<\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|<\cdots<$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n-2}\left|x_2-\sqrt{2}\right|=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n-1}\left|\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right|<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n-1}<\varepsilon$$

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}+1\right]$，当 $n>N$ 时，$\left|x_n-\sqrt{2}\right|<\varepsilon$　$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

4. $\tan t;\dfrac{1}{at\cos^3 t}$

解析: $\dot{x}=a(t\cos t)$　$\ddot{x}=a(\cos t-t\sin t)$　$\dot{y}=a(t\sin t)$　$\ddot{y}=a(\sin t+t\cos t)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\tan t\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dot{x}\dot{y}-\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\frac{1}{at\cos^3 t}$$

5. $$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{e^{-y^2}}{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{2ye^{y^2}}=0$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{2y^3}{e^{y^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{6y^3}{2ye^{y^2}}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{3y}{e^{y^2}}=0=f'(0)$　$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

5. 设 $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x,f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi},f''(x)=-\sin x<0\therefore f'(x)$ 单调递减

又 $f'(0)=1-\dfrac{2}{\pi}>0$　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{\pi}<0,\therefore f(x)$ 先增后减

又 $f(0)=0$　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\therefore f(x)>0$, 即 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$

7. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$$\begin{cases}f(0)=f(c)-cf'(c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2 & \xi_1\in(0,c)\\ f(1)=f(c)-(1-c)f'(c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-c^2) & \xi_2\in(c,1)\end{cases}$$

$$\therefore f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c^2)-\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2$$

$$|f'(c)|=\left|f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c^2)\right|$$

$$\leq|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c^2)$$

$$\leq2a+\frac{b}{2}[c^2+(1-c^2)]$$

$\leq 2a + \frac{b}{2}$

8. $\frac{1}{2}f''(0)$

解析: $\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x-\ln(1+x)} = f'(\xi) \quad \ln(1+x) < \xi < x, \quad$ 原式 $= \lim_{x\to 0} \frac{f'(\xi)[x-\ln(1+x)]}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{f'(\xi)-f'(0)}{x} \cdot \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{f'(\xi)-f'(0)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$= f'(0) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}$

$= f'(0) \cdot \lim_{x\to 0} \cdot \frac{1}{2(1+x)}$

$= \frac{1}{2}f''(0)$

9. 设 $F(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} = 0$,
$\lim_{x\to\infty} F'(x) = \frac{(1+x^2)f'(x) - 2xf(x)}{(1+x^2)^2}$, $\because$ 有 $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
又 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 由罗尔定理可知: $\exists \xi \in \mathrm{R}$, 使 $F'(\xi) = 0$,
即 $f'(\xi)\left(1+\xi^2\right) = 2\xi f(\xi)$ 成立.

彭康学导因