数学 I 历次作业及解答

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

利用 $\sin x\sim x$、$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，先变形得

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\longrightarrow\boxed{\frac{1}{2}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin 5x}{\tan 2x}$

由 $\sin 5x\sim 5x$、$\tan 2x\sim 2x$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin 5x}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}(x+1)\frac{5x}{2x}=\boxed{\frac{5}{2}}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+5x^2}-1}{\ln(1+x)\arctan(\frac{x}{2})}$

因为

$$\sqrt[3]{1+5x^2}-1\sim\frac{5}{3}x^2,\qquad \ln(1+x)\sim x,\qquad \arctan(\frac{x}{2})\sim\frac{x}{2},$$

所以原极限为 $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}}=\boxed{\dfrac{10}{3}}$。

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin^2 x)^{\frac{\ln(1+x)}{1-\cos x}}-1\right]$

令 $u=\dfrac{\ln(1+x)\ln(1+\sin^2 x)}{1-\cos x}$。由

$$\ln(1+x)\sim x,\qquad \ln(1+\sin^2 x)\sim\sin^2 x\sim x^2,\qquad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},$$

得 $u\sim 2x\to 0$。于是原式 $=e^u-1\sim u\to\boxed{0}$。

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin(\frac{\pi x}{2})}$

令 $t=x-1\to 0$，则

$$\ln\cos t=\ln\big[1+(\cos t-1)\big]\sim\cos t-1\sim-\frac{t^2}{2},$$

$$1-\sin(\frac{\pi x}{2})=1-\cos(\frac{\pi t}{2})\sim\frac{\pi^2t^2}{8}.$$

故原极限为 $\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\pi^2}{8}}=\boxed{-\dfrac{4}{\pi^2}}$。

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$

方法一： 令 $t=\frac{1}{x}\to 0^+$，记原式为 y。由

$$\delta=\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{2}\sim\frac{t^2}{4},\qquad\ln(1+\delta)\sim\delta\sim\frac{t^2}{4},$$

得

$$\ln y=t\ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=t\ln\frac{2}{t}+t\ln(1+\delta)\longrightarrow 0.$$

这里用到基本极限 $t\ln t\to 0$（$t\to 0^+$）。因此 $y\to\boxed{1}$。

方法二： 当 $x\geq 1$ 时，$1<x+\sqrt{1+x^2}\leq 3x$。利用 $\ln v\leq v-1$（$v>0$），有

$$0\leq\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\leq\frac{\ln(3x)}{x}=\frac{2\ln\sqrt{3x}}{x}\leq\frac{2(\sqrt{3x}-1)}{x}\longrightarrow 0.$$

因此，$\ln y\to 0$，故 $y\to\boxed{1}$。

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

记括号内的和为 S_n。当 $1\leq k\leq n$ 时，

$$\frac{k}{n^2+n}\leq\frac{k}{n^2+k}\leq\frac{k}{n^2+1}.$$

求和并利用 $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$，得

$$\frac{1}{2}\leq S_n\leq\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}\longrightarrow\frac{1}{2}.$$

因此，原极限为 $\boxed{\dfrac{1}{2}}$。

8. 求三次函数 $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的拐点。

因为 $a\neq 0$，且

$$Q'(x)=3ax^2+2bx+c,\qquad Q''(x)=6ax+2b,$$

令 $Q''(x)=0$，得 $x_*=-\dfrac{b}{3a}$。由于 $Q''(x)=6a(x-x_*)$ 在 x_* 两侧异号，故拐点为

$$\boxed{\left(-\frac{b}{3a},\ Q\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)}.$$

9. 求圆的曲率半径，其中

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos\theta, \\ y=y_0+R\sin\theta, \end{cases}\qquad R>0.$$

对 θ 求导，得

$$\begin{aligned} x'&=-R\sin\theta,\quad y'=R\cos\theta,\\ x''&=-R\cos\theta,\quad y''=-R\sin\theta. \end{aligned}$$

因此曲率半径为

$$\rho=\frac{\left[(x')^2+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|x'y''-y'x''|}=\frac{(R^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2}=\boxed{R}.$$

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\arctan n-\frac{\pi}{2}\right)$

由 $n>0$ 时 $\arctan n+\arctan\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}$，得

$$n\left(\arctan n-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\arctan(1/n)}{1/n}\longrightarrow\boxed{-1}.$$

11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right]^n$

记原式为 $a_n>0$。利用 $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+O(t^3)$（$t\to 0$），得

$$\begin{aligned} \ln a_n&=n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]\\ &=n\left[-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\longrightarrow-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此原极限为 $\boxed{e^{-1/2}}$。

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{100}\ln^{10} n}{2^n}$

令 $a_n = \frac{n^{100}\ln^{10} n}{2^n}$（$n \geq 2$），则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{10} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

取 $\frac{1}{2} < q < 1$，则存在 N，使 $n \geq N$ 时 $a_{n+1} \leq q a_n$，从而 $0 < a_n \leq a_N q^{n-N} \to 0$。故原极限为 $\boxed{0}$。

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \cdot (n!) \cdot \ln^{10} n}{n^n}$

令 $b_n = \frac{2^n\cdot(n!)\cdot\ln^{10} n}{n^n}$（$n \geq 2$），则

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{10}\\ &\longrightarrow \frac{2}{e} < 1.\end{aligned}$$

由第 12 题的几何数列估计可知 $b_n \to 0$，故原极限为 $\boxed{0}$。

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n(n+1)^{10}}{3^n n!}$

令 $c_n = \frac{n^n(n+1)^{10}}{3^n n!} > 0$，则

$$\begin{aligned}\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{10}\\ &\longrightarrow \frac{e}{3} < 1.\end{aligned}$$

由第 12 题的几何数列估计可知 $c_n \to 0$，故原极限为 $\boxed{0}$。